colección
amalgama

Introducción a la geometría no euclidiana y la fundamentación axiomática

José Octavio Poli

Facultad de Ciencia y Tecnología

EDITORIAL UADER

colección
amalgama

Introducción a la geometría no euclidiana y la fundamentación axiomática

Facultad de Ciencia y Tecnología

EDITORIAL UADER

Introducción a la geometría no euclidiana y la fundamentación axiomática

José Octavio Poli

Poli, José

Introducción a la geometría no euclidiana y la fundamentación axiomática / José Poli. - 1a ed . - Paraná : Editorial Uader, 2108.

270 p. ; 27 x 20 cm. - (Amalgama)

ISBN 978-950-9581-45-6

1. Geometría. 2. Geometría Analítica. I. Título.

CDD 516.3

EDITORIAL UADER

Secretaría de Integración y Cooperación con la Comunidad y el Territorio

Entre Ríos, Argentina, 2018

Carlos Gardel 38

E3100FGA Paraná

editorial@uader.edu.ar

(0343) 4311699

www.uader.edu.ar

Diseño Gráfico: Alfredo Molina

Edición y corrección: Sebastián Galizzi

ISBN 978-950-9581-45-6

9 789509 581456

(...) las ideas están en una relación con las épocas muy parecida a la que sufren las plantas en los climas. Una época viene a ser un clima intelectual, el predominio de ciertos principios atmosféricos que favorecen o agostan determinadas cosechas.

(...) La historia de las geometrías no euclidianas muestra en un caso concreto cómo las ideas hacen a veces durante siglos y siglos su camino subterráneo, esperando la hora propicia en que la atmósfera las solicita y las halaga.

José Ortega y Gasset

Índice

Capítulo 9
Teoría general del paralelismo

Capítulo 10
Breve paseo por la geometría hiperbólica (o de Gauss, Lobachevski y Bolyai... y Saccheri)

Capítulo 11
Modelos para la geometría hiperbólica

Prólogo

Escribir un libro es una tarea apasionante que implica una gran responsabilidad, mucho esfuerzo y un desafío enorme. Más aún si el libro trata de temáticas poco abordadas en la bibliografía actual y de fundamental importancia en la formación y el desarrollo del pensamiento crítico y la capacidad de análisis de los estudiantes, y sobre todo si estos se están formando como docentes.

El conocimiento y la comprensión de teorías que dan fundamento a las disciplinas –en el caso que nos ocupa específicamente a la Matemática, y más precisamente a uno de sus campos de estudio particular como lo es la Geometría– son de fundamental importancia para desarrollar en el estudiante la capacidad reflexiva, el espíritu crítico y el pensamiento lógico-deductivo, porque solo si este ejercicio se da durante el proceso de su formación como docente podrá luego profundizarlo, internalizarlo y aplicarlo en su práctica profesional.

Entender los desarrollos teóricos que posibilitaron grandes avances en el proceso de construcción del imponente edificio que representa la Matemática no es una tarea sencilla y, en consecuencia, su abordaje requiere una importante dosis de audacia, de voluntad, de ganas y de conocimientos sólidos para plasmarlos en un obra escrita que, sin perder el rigor y la precisión puramente matemática, la haga interesante y rica para el lector.

Pocas veces en la historia el docente ha debido enfrentar tantos cambios como los acontecidos en las últimas décadas, muchos de ellos sociales y culturales. Entre ellos podrían mencionarse los requerimientos de la sociedad en relación con una formación cada vez más extensa, producto del proceso de aceleración en la producción de saberes. Esto hace que debamos proveer de formas de pensar, de razonar y de construir conocimiento, a partir de estructuras cuyo estudio y análisis abran un abanico de posibilidades que tengan la capacidad de sorprender, de lograr que el estudiante tenga la necesidad de imaginar otras estructuras diferentes a las convencionales en el marco de la cuales transcurre su vida, y a partir de las cuales podrá pensar y crear otras, las que, sin lugar a dudas, constituirán una herramienta poderosa en su accionar profesional futuro.

Este desafío, en el más amplio sentido de la palabra, ha sido encarado exitosamente por el profesor José Poli en la presente obra, con un exquisito rigor científico y una precisión conceptual adecuada, acompañada de representaciones gráficas que ayudan de manera determinante a comprender el contenido. Hace con ella un recorrido interesante y atractivo en el desarrollo de las geometrías no euclidianas, que son el verdadero sustento para comprender e interpretar la geometría euclidiana, en el marco de la cual transcurre nuestra vida cotidiana.

La obra adquiere una importancia relevante por varios motivos: prácticamente no existen textos actuales –solo unos pocos que datan de muchos años atrás–, que aborden esta temática específica de manera tan clara y precisa. Cabe destacar además, que se trata de la experiencia acumulada de muchos años enseñando estos temas a futuros profesores de Matemática en el histórico y prestigioso Instituto Nacional Superior del Profesorado de Paraná y, más recientemente, en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Autónoma de Entre Ríos, cuya editorial publica este libro.

Un estudio como este, acerca de la evolución de la geometría, contribuye a mostrar que la historia de la Matemática puede ser una fuente inagotable de la que el profesor beberá en forma permanente para garantizar una mejor enseñanza y lograr un mejor aprendizaje de los alumnos. Además, posibilita la adquisición de nuevas y atractivas perspectivas acerca de la naturaleza altamente abstracta de la matemática, mediante las que se han logrado importantes desarrollos teóricos y aplicaciones prácticas que han contribuido de manera determinante en el avance científico-tecnológico de la sociedad actual.

Los estudiantes que tomen contacto con el libro descubrirán un campo importante de conocimientos que les permitirá adentrarse en la historia de la Matemática, pero también les hará sentir la necesidad de iniciarse en la investigación acerca de estos temas. En tanto que a los profesores de Matemática y a los lectores interesados, la obra les ofrece la posibilidad de descubrir, en algunos casos, y de incrementar y profundizar en otros, el conocimiento sobre estos asuntos.

Lic. Marino Schneeberger

Agradecimientos

Publicar un libro, especialmente si es el primero, es la materialización de un sueño. Agradezco por esto a Dios por disponer todo para que “sea”. A la Editorial Uader; a Florencia Walz, su directora, a Sebastián Galizzi y Alfredo Molina, editor y diseñador, por el acompañamiento profesional y humano.

A mis maestros y autores de todos los tiempos, por enseñarme conocimientos e ideales.

A Ricardo Claucich por motivarme en 1987 a enseñar matemática, por ser mi docente de los temas del libro y por ver mi original, antes de que yo pensara en publicarlo; a Marino Schneeberger por sugerirme publicarlo en Editorial Uader y por su prólogo, y a ambos por su cordial y desinteresado apoyo. A Teresita Ingui y Juan Canavelli, por enseñarme matemática; a Alberto Abud y María Candioti, por enseñarme filosofía; a Alfredo Pautasso y Estela Paradelo, por transmitirme el amor por el idioma e inspirarme el gozo de escribir. A mis docentes del secundario y del profesorado por su ciencia y humanidad. A los colegas que me animaron, en particular Rosa Blasón, Patricia Villamonte, Stella Vaira y Edit Rougier. A mis alumnos y ex alumnos por ejercer su función y obligarme a estudiar más; entre ellos a Jonathan Angeloni, Mariana Cottonaro, Lucila Dandeu, Melina Flesler y Gimena Reisenauer, todos ya profesores, por ayudarme a revisar algunos capítulos.

A la Facultad de Ciencia y Tecnología y al Instituto Nacional de Enseñanza Superior, ya no existente, por brindarme un ámbito para explicar estos maravillosos temas que aquí intenté plasmar. También al extinguido Instituto Nacional Superior del Profesorado de Paraná, por formarme como profesor y del que guardo un sentido recuerdo.

Dedico este libro a mi familia, a mis amigos y a Ricardo Claucich.

Consideraciones preliminares

Por esas cosas de los caminos que cada uno recorre por gracia de Dios, me hallo desde 1998, con breves interrupciones, enseñando geometría a futuros profesores de matemática.[1] Desde aquel año hasta hoy, la experiencia y el estudio han hecho lo suyo y, con alegría, he visto aprender a muchos de mis perseverantes alumnos, en gran parte por sus méritos y un poco por mis esfuerzos. Con frecuencia me sentí complacido en una de las vivencias más exquisitas que puede experimentar un docente: ver en el otro el gozo por el descubrimiento de la verdad.

Es sabido que nada se aprende mejor que lo que se enseña. Por ello, luego de un ordenamiento y relación de los contenidos de la cátedra, logrados tras varios años en su ejercicio, estimé válido y necesario transmitir en un libro ese saber organizado, empapado, un poco, del espíritu de mis clases. Esto debe ser así, pues otra de las verdades de la docencia es que el profesor no es un mero transmisor de conocimientos descarnados, sino que, en cierta forma, él y su materia conforman una unidad que se comunica a los estudiantes de una manera única y personalísima. Un todo complejo que puede llamarse un "estilo". Esto nos tranquiliza: una máquina nunca tendrá eso y los maestros siempre serán necesarios para la humanidad.[2]

Este trabajo trata sobre dos asuntos principales:

- geometrías no euclidianas[3] y

- fundamentación axiomática de la geometría.

1 Me desempeño en el Profesorado en Matemática de la Universidad Autónoma de Entre Ríos (UADER), Facultad de Ciencia y Tecnología, sito otrora en la ciudad de Paraná y luego en la de Oro Verde, en Entre Ríos, Argentina. En el pasado ese Profesorado perteneció al Instituto Nacional de Enseñanza Superior (INES), ex Instituto Nacional Superior del Profesorado (INSP). Fue en esta última institución donde recibí mi formación docente en matemática.

2 En el artículo "Lo que casi le dije a Gary Kasparov" escrito en ocasión de cumplirse 20 años desde que un programa de ajedrez derrotó por vez primera a un campeón mundial, el periodista Ariel Torres escribió: "Gary, usted jugó al ajedrez, pero la máquina no. La máquina ni siquiera sabía dónde estaba. (...) voy a aceptar que la computadora ganó al ajedrez cuando esa mente sintética tenga ganas de jugar, cuando le guste jugar, cuando anhele el triunfo. Cuando esa mente sepa dónde se encuentra y por qué está allí. Cuando sienta miedo de perder, cuando le transpiren las manos y perciba en la yema de los dedos la tibia madera de las piezas, justo antes de acometer una jugada que podría ser fatal, y cuando esa tibieza, por una azarosa asociación de ideas que la lleva hasta su infancia, hasta su primer tablero, le haga cambiar de idea y decida, no por la fuerza bruta del cálculo, sino por una súbita corazonada, hacer una movida diferente. Aceptaré, Gary, que un artefacto construido por el hombre ha ganado al ajedrez cuando le cueste dormir la noche anterior, cuando atraviese una crisis conyugal, cuando aprenda a llorar de alegría. O a reírse de sí mismo." (La Nación, edición *on line* del 10/3/17)

3 *Euclidiano:* perteneciente o relativo a Euclides o al método de este matemático griego del siglo III a. C. (Diccionario de la Lengua Española *on line,* Real Academia Española, http://www.rae.es, que se citará DLE). No figuran en el diccionario las palabras "euclídeo" ni "euclideo".

Estoy convencido de que estos temas son de suma importancia para la formación de un docente de matemática, en cuanto que a través de estos puede conseguirse:

a) una comprensión de más calidad de la geometría;

b) el entendimiento del funcionamiento de los sistemas de axiomas;

c) una integración del contenido matemático con su historia.

En virtud de tal interés sostengo que es necesario concederles un lugar destacado en el plan de estudios del profesorado y, en la formación geométrica, no reducirlos a aspectos meramente anecdóticos, en aras de dejar mayor espacio académico para contenidos más técnicos, más "actuales" o más "útiles".

La finalidad que persigo es más formativa que informativa y está dirigida sobre todo al estudiante y al docente joven de espíritu de nuestra ciencia. Por tratarse de un texto introductorio a temas tan amplios, no todo ha sido hondamente tratado. Nos hallamos ante ramas del saber extensas y ricas en vericuetos matemáticos, históricos y filosóficos.

Lo que este trabajo contiene fue tomado de autores y científicos, que oportunamente cito, a los que corresponde todo acierto y mérito, y a quienes pido disculpas por si hubiese falseado o malinterpretado sus aportes en mi búsqueda de la verdad. Por esto mismo quedo totalmente abierto a las críticas y correcciones que sean procedentes.

Importancia de este estudio

Alguien podrá opinar que no debería perderse demasiada energía en un estudio de las geometrías no euclidianas y que el tiempo disponible tendría que invertirse en contenidos más actuales o significativos[4]. Contrariamente a esta postura, propongo aceptar que tal estudio es importante y necesario en la formación de los matemáticos, por las siguientes razones:

1. El acercamiento a las geometrías no euclidianas provoca en quien está habituado a la geometría euclidiana (bien podría decirse "instalado" en ella) una saludable *apertura mental* hacia otras verdades y objetos matemáticos que cobran sentido (¡y existencia!) dentro de un marco teórico determinado, y que son independientes de la intuición y de la experiencia. Ese ensanchamiento mental desemboca en una ampliación de los horizontes de la geometría y una desestructuración, que atacan la modorra o la rutina en las que a veces está inmerso el intelecto.

4 Esta es una palabra muy citada y se la ha asociado a la palabra *importancia.* ¿Quién o qué determina la *significatividad* de un contenido que ha de ser enseñado: la moda fútil, la utilidad tirana, el interés que suscita, su valor intrínseco, la opinión de ciertos intelectuales del momento...? Mi opinión es que la significatividad de un contenido proviene de su *valor formativo* y de su *valor propio*: esto es, que edifique a la persona y que su verdad, en función de aquello, *deba* ser conocida para lograr el objetivo educativo. Esta meta no debe ser necesariamente la consecución de un bien útil o de una destreza que ayude a producir cosas. Lo significativo para un educando debe ser mayormente señalado, en general, por sus educadores, no por él mismo, como pretenden algunos.

2. Se produce la comprensión de la geometría como parte de la matemática, sin vínculo necesario con la ciencia física, y del "funcionamiento" de la matemática en cuanto ciencia deductiva que trata sobre objetos formales. Entender el papel desempeñado por los axiomas, así como su intercambiabilidad con los teoremas en sistemas axiomáticos diferentes, arroja luz sobre la dinámica y la coherencia internas de la matemática.

3. Se entra en contacto con interrogantes ligados a las geometrías, dentro y fuera de la matemática, que tienen interés en sí mismos y cuyo conocimiento enriquece la formación intelectual; así se pone mejor en contexto el saber específico. Es bueno que los estudiosos no estén encasillados en compartimientos estancos; deben abrir la puerta (o la ventana) y salir a la compleja realidad, de manera que se sumerjan en un *contexto conexo* del cual forma parte la ciencia que estudian, no como ciencia central sino como parte del concierto de las formas humanas de conocer, conformando una intrincada red. Podemos tomar la idea principal del siguiente texto de G. Sarton, que se refiere a la historia de la ciencia, pero que fácilmente podemos parafrasear para nuestra especialidad matemática: "El principal equívoco relacionado con la historia de la ciencia proviene de aquellos historiadores de la medicina que tienen el concepto de que la medicina es el centro de la ciencia" (Sarton, 1965: XVIII).

4. Se genera una *reflexión sobre la geometría en sí misma*, una metageometría (véase cap. 5, pág. 90) no poniéndose el acento sobre un contenido, sino sobre lo que está en la base de ese contenido.

5. Se ahonda en el entendimiento de la geometría euclidiana, "la de siempre", la que hemos venido estudiando desde las escuelas primaria y secundaria y, tal vez, en la universidad, pero que ahora es observada con ojos nuevos. Se comprenderá que la misma geometría puede construirse desde distintos sistemas de axiomas que generan las mismas verdades. Muchos buenos textos muestran que la geometría básica puede estudiarse desde enfoques muy instructivos y para nada elementales.[5]

6. En relación con lo afirmado en el ítem 3, se descubren intrigantes conexiones que ponen en relieve la armonía, la coherencia y la belleza de la matemática. Al indagar en ellas van apareciendo muchas "puertas", cada una de las cuales nos lleva a lugares insospechados. Algunos de estos vínculos abiertos tienen que ver con asuntos relativos a la historia de la matemática. Otros, con la filosofía y la física.

7. Por último, una razón de índole más utilitaria: es inusual que estos temas sean ofrecidos en capacitaciones o cursos de perfeccionamiento, hecho que no sucede con los que comúnmente se considera significativos. No obstante esto,

> Einstein y Minkowski hallaron en la geometría no euclidiana una base geométrica para la comprensión del tiempo y del espacio físicos. A comienzos del siglo XX todo estudiante serio de matemática y física estudiaba geometría no euclidiana. Esto no ha sido así para los matemáticos y físicos de nuestra generación. Sin embargo, con el paso del tiempo se ha hecho más y más patente que las geometrías de la curvatura negativa, de las cuales la no euclidiana hiperbólica es el prototipo, son formas genéricas de la geometría. Tienen profundas aplicaciones en el estudio de variable compleja, en la topología de variedades bi y tridimensionales, en los grupos infinitos, en física y en dispares campos de la matemática. Un conocimiento operativo de geometría hiperbólica se ha convertido en requisito previo para quienes trabajan en esos campos. (Cannon et al., 1997: 60).

5 A modo de ejemplo, cito el excelente libro (Moise, 1974). Véase la Bibliografía.

Panorama del camino a recorrer

No hay caminos reales en geometría[6].

Lo primero (capítulos 1 a 4) será un vistazo a unos temas históricos, filosóficos y matemáticos, que nos ayudará a poner en contexto y a comprender mejor la geometria euclidiana, lo que es fundamental para entender las geometrías no euclidianas. Estas podrían abordarse más "matemáticamente", yendo directamente a sus axiomas y teoremas, pero ese acercamiento es frío, menos humano y menos rico, formativamente hablando.

En segundo lugar (capítulos 5 y 6), vamos a tratar sobre los sistemas de axiomas y el método axiomático, lo que es clave a fin de lograr una aceptable comprensión de la *fundamentación axiomática de la geometría*, y veremos el asiento de la geometría de Euclides sobre axiomas modernos.

Luego (capítulos 7 y 8) iniciaremos la novelesca aventura del *Postulado V de Euclides* (para muchos "el" postulado). Nos sumergiremos en una de las gestas más impresionantes de la historia de la matemática y del pensamiento humano, que gira en torno al axioma más famoso de todos. De hecho, al escribirlo con mayúscula, aun sin el V romano, se hace referencia a él y no a otro.

Proseguiremos (capítulo 9) con el estudio de la *teoría general de las paralelas*, un tema interesante y apasionante, que nos dará pie para ingresar al maravilloso mundo de la geometría hiperbólica, siempre y cuando optemos por cierto axioma particular de paralelismo.

Posteriormente (capítulos 10 y 11) estudiaremos un poco de *geometría hiperbólica* y algunos de los modelos euclidianos que fueron desarrollados para respaldar su validez. Aquí se resolverá un gran interrogante que resistió intentos de respuesta por más de veinte siglos.

Finalmente (capítulos 12 al 14) daremos un breve paseo por la *geometría elíptica*, por algunas cuestiones surgidas, en la matemática y fuera de ella, tras la aparición de las geometrías no euclidianas, y por enfoques de diferentes autores sobre la organización dada a la geometría. ¿Viene el lector?

Sobre la notación simbólica en este libro

El estudiante suele preguntarse sobre la notación geométrica. En efecto, hay textos donde las rectas se indican con minúsculas y los puntos con mayúsculas, mientras en otros se procede a la inversa. El primer punto de vista se justifica diciendo que los puntos son más fundamentales porque forman las rectas, de allí las mayúsculas. La segunda opinión, de base conjuntista, afirma que los puntos son elementos de conjuntos (las rectas), por eso van las minúsculas para ellos. Como los puntos y las rectas son más valiosos que su notación, lo importante aquí es mantener un criterio invariable.

En este libro se mencionan unos puntos A, B, ... y unas rectas r, s, ... O bien se dice "la recta AB" cuando está determinada por los puntos A y B. Los planos se nombran con letras griegas o, raramente, citando tres puntos que los determinan.

6 Afirmación que, al parecer, dirigió Euclides al rey Ptolomeo I Soter, indicándole que todos debemos recorrer el mismo camino para aprender geometría.

Los segmentos se denotan como es habitual, por ejemplo $\overline{AB}$. También se emplea esta notación para indicar la longitud del segmento, pues el contexto lo hace claro, en vez del símbolo más complicado $|\overline{AB}|$. Las semirrectas se indican normalmente, como $\overrightarrow{OP}$ para una de origen O que contiene a P. Los triángulos y demás polígonos se indican citando sus vértices en seguidilla, tal como $PQRS$ para un cuadrilátero. Los arcos son denotados con un paréntesis previo, por ejemplo $(AB$, para el arco de curva comprendido entre A y B.

Para los ángulos se generó un eclecticismo por conveniencia. Van circunflejos en letras griegas, así: $\hat{\alpha}$, o bien en números, como $\hat{1}$, o la notación de vértices, tal como $\angle ABC$ para el ángulo de vértice B y lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.

Se indica la congruencia con el símbolo de igualdad (=) en vez del tradicional $\cong$.

Esta simbología pueden variar en las citas textuales, como puede verse, por ejemplo, en los teoremas transcriptos de los *Elementos* de Euclides.

[Capítulo 1]

La geometría euclidiana

Los primeros pasos de la geometría

> ¿Cuándo comenzó la ciencia? ¿Dónde comenzó? Comenzó cuando y donde los hombres trataron de resolver los innumerables problemas de la vida (...)
>
> Las más simples mediciones, como las necesarias para construir un altar o una casa, pudieron inspirar las primeras ideas geométricas, aunque el amor por la belleza, innato en la mayoría de los hombres, fue probablemente la verdadera cuna de la geometría... (Sarton, 1965: 3, 18)[1].

La geometría, una de las más impresionantes ramas de la matemática, apareció con los primeros seres humanos, y junto con la aritmética son de lo más antiguo de la matemática.

Las ideas geométricas primigenias surgieron del contacto con la naturaleza. Entre un sinfín de cosas, los primeros humanos vieron las formas redondas del Sol y la Luna, la rectitud de los rayos luminosos entre las nubes y la simetría de plantas y animales. El universo siempre ejecutó un verdadero concierto geométrico que despertó genuina admiración en los humanos.

Las nociones iniciales fueron seguramente inconscientes. De modo asistemático el hombre obtuvo conocimientos geométricos intuitivos, impelido por requerimientos prácticos: construir cosas, medir distancias, orientarse sobre el terreno, etcétera. Además, como el espíritu humano siempre se conmovió ante lo bello, surgieron verdaderas necesidades estéticas vinculadas con la ornamentación, la pintura, la escultura y la artesanía. Estas necesidades solo se satisfacían con el arte, y este se transformó en una venera inagotable de ideas geométricas. La técnica y el arte siempre han ido de la mano de la geometría.

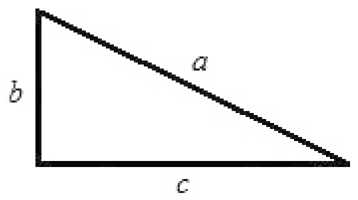
En la vida de cualquier ciencia los primeros pasos fueron los más difíciles. Como contrapartida, ante cada problema resuelto o camino ensayado, la ciencia incrementó su capital de verdades. Luego llegaría el tiempo de sistematizar y analizar.

En el marco de las civilizaciones orientales antiguas avanzadas de Egipto, Mesopotamia, China y valle del Indo, que se remontan a entre veinte y cuarenta siglos antes de Cristo, y en las precolombinas, más jóvenes, la geometría también se alió con la astronomía.

Los historiadores han hallado documentadas maneras exactas, aproximadas o aun erróneas de calcular superficies y volúmenes elementales, cierto conocimiento de la relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$

1 George Alfred Leon Sarton (1884-1956) fue un autor fundamental en los estudios de la Historia de la Ciencia. Encaró una monumental obra de la especialidad dirigida al público general, que tendría nueve tomos, pero lamentablemente falleció luego de finalizado el segundo.

aplicada a triángulos rectángulos particulares (Fig. 1), y recetas para trazados geométricos, algunas vinculadas con construcciones reales.



(Fig 1) Un triángulo rectángulo; *a* es la hipotenusa, *b* y *c* son los catetos.

Los griegos heredaron aproximadamente a partir del año 1000 a. C. muchos elementos de las culturas egipcia y mesopotámica, incluidas tradiciones científicas. Para ellos los egipcios fueron los creadores de la ciencia y los inventores de la geometría. Al parecer los sabios griegos viajaban a países del oriente a fin de instruirse en sus conocimientos.

El nombre "geometría", que proviene de los vocablos griegos *geo* (tierra) y *metron* (medida), tiene un origen claramente histórico. En efecto, alude a la observación de las prácticas de los agrimensores egipcios[2], a fin de delimitar las parcelas destinadas a siembra en las márgenes del río Nilo, luego de que este borrara, tras su inundación anual, las marcas hechas anteriormente. ¡Esta es una historia muy contada!

Según lo que conocen hoy los historiadores, los saberes de las antiguas civilizaciones no provenían de deducciones sistemáticas ni estaban organizados en un corpus científico (lo cual no implica negarles cierto carácter de ciencia). Esto es coherente con el hecho de que en algunos casos los contenidos matemáticos formaban parte de textos astronómicos o religiosos, cuya finalidad no era matemática. Tiene lógica pensar también que la procedencia de los conocimientos no fuera revelada, tal vez por no asignarles importancia o como una forma de mantenerlos en secreto.

Podemos ver aquí un interrogante histórico que se plantea en relación con esto: ¿cuál fue el nivel *real* del conocimiento geométrico y, en general, matemático y tecnológico de esas culturas? La pregunta surge de la simple observación de sus hazañas tecnológicas, apreciables aún hoy: pirámides, templos, obeliscos, sistemas de drenaje, canales, murallas, orientación de edificios, etc. La duda más acuciante es: ¿cómo podrían llevarse a cabo tales proezas sin un conocimiento más avanzado que el que muestran los testimonios escritos? Es cierto que la escritura era usada para fines religiosos, literarios, administrativos o conmemorativos. El conocimiento artesanal y técnico, en cambio, se transmitía oralmente de maestro a aprendiz, y ellos, o bien no sabían escribir o no tenían interés en divulgarlo, prefiriendo mantenerlo como un arcano de su arte que además les aseguraba un lugar en la sociedad.

2 Los "harpedonaptes" o "tendedores de cuerdas".

El ascenso de la geometría

> Aristipo, un seguidor o alumno de Sócrates, va a parar tras un naufragio a orillas de la isla de Rodas. Allí encuentra dibujadas en la arena unas figuras geométricas, e inmediatamente se dirige a sus compañeros exclamando con alegría: «¡Ánimo, que veo huellas de hombre!». Huellas de verdaderos hombres, añadimos nosotros (Colerus, 1972: 36).

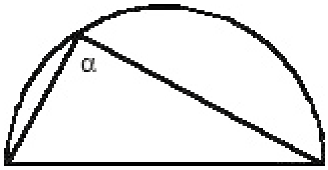
Con los griegos, a partir del S. VI a. C., se inicia un gradual e incontenible ascenso de la geometría, que pasó de ser un conjunto de conocimientos inconexos y mayormente empíricos (según lo que está documentado, insisto), a transformarse en una ciencia organizada de manera deductiva. Un viaje geométrico apasionante se puso en marcha con Tales de Mileto, célebre hombre de su tiempo[3]. Tales se dio cuenta de la existencia de principios geométricos de carácter general y, por lo tanto, abarcadores de muchos casos particulares. Algunos de estos principios presuntamente descubiertos por él en este campo son:

1) El diámetro biseca[4] al círculo (entiéndase: *todo* diámetro de *todo* círculo biseca a este; ¡he ahí el principio general!).

2) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles[5] son congruentes.

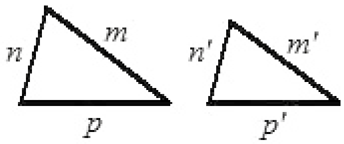
3) Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

4) Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto (Fig. 2). Este enunciado es citado por algunos autores como “teorema de Tales”.



(Fig. 2) El ángulo α es recto.

5) Los lados de triángulos semejantes[6] son proporcionales (Fig. 3).



(Fig. 3) Los triángulos son semejantes, entonces *m/m’ = n/n’ = p/p’*.

3 Los jonios eran una raza griega que ocupó una franja de territorio al oeste de la península de Anatolia (hoy Turquía). En esa región se erigía la próspera ciudad de Mileto, famosa en su tiempo y luego destruida por los persas. Tales (o Thales) vivió en la primera mitad del siglo VI a. C.

4 Es decir: lo divide en dos partes congruentes.

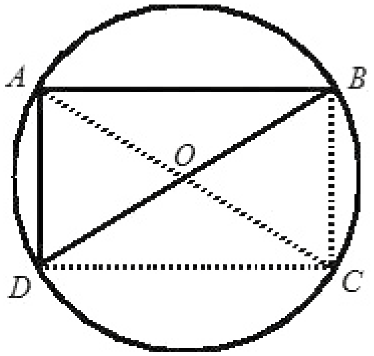
5 Si bien cualquier lado de un triángulo puede ser su base, en el isósceles suele llamarse base al lado desigual.

6 Intuitivamente decimos: de igual forma aunque su tamaño pueda diferir.

> ¿Conoció Tales todas y cada una de esas proposiciones, o proposiciones equivalentes a ellas? ¿Supo demostrarlas? O, de lo contrario, ¿cómo las conoció? No existe certeza sobre estos puntos, pero quizás podamos decir que Tales fue el primer hombre de país alguno que concibió la necesidad de las proposiciones geométricas (...)
>
> ...su mayor mérito intelectual fue el reconocimiento de que no es suficiente resolver los problemas, sino que es preciso racionalizar las soluciones (...). Tales fue bastante inteligente para advertir que los métodos eran más valiosos que las soluciones individuales, y que implicaban principios o, como decimos en geometría, teoremas. (...) ...la tradición griega atribuye las primeras proposiciones geométricas a Tales (...). Su obra, derivada de éstas, abrió nuevas posibilidades de desarrollo que condujeron gradualmente a los *Elementos* de Euclides y a todos los maravillosos resultados geométricos de nuestros días (Sarton, 1965: 210).

Con este impulso la geometría dejó poco a poco de ser un conjunto de reglas prácticas y desde aquí puede adjetivársela de *racional* y *deductiva*. Sin embargo hay que ser cuidadosos y no ir al extremo de pensar que se hacían deducciones al estilo moderno.

No ha llegado a nosotros ningún texto de Tales. Sobre un hipotético "estilo de razonamiento deductivo" de Tales, es ilustrativo el caso presentado por L. Hull para el enunciado 4 citado arriba, que se transcribe a continuación (Fig. 4).



(Fig. 4)

> Incluso para una persona sin preparación geométrica es obvio que las diagonales de un rectángulo son de la misma longitud y se cortan en dos mitades. Es también evidente que todo cuadrilátero cuyas diagonales tengan esas propiedades es un rectángulo. Si trazamos dos diámetros cualesquiera, *AC* y *BD* de un círculo con centro *O*, *ABCD* será un rectángulo. Omitamos ahora las líneas de puntos de la figura. Nos quedamos entonces con la proposición de que si *A* es cualquier punto del arco de una semicircunferencia, subtendido por el diámetro *BD*, entonces *BAD* es necesariamente un ángulo recto. Pocas personas ignorantes de este teorema lo considerarían evidente si se les presentara sin la argumentación expuesta (Hull, 1978: 32).

El franco crecimiento y desarrollo de la geometría griega como ciencia deductiva se dio en dos aspectos:

1) *En cantidad de conocimientos*: las proposiciones geométricas que enunciaban propiedades o justificaban construcciones, surgieron en gran número como resultado de la inventiva, el ingenio y la creatividad de matemáticos de toda talla diseminados en varias escuelas matemáticas[7].

2) *En calidad lógica y metodológica*: la geometría alcanzó en el mundo griego una excelencia asombrosa para la época; los razonamientos eran cada vez más sofisticados y sólidos. Además, por si esto fuera poco, algunos preclaros intelectuales vieron la necesidad de ordenar la geometría de manera tal que cada teorema se derivara del anterior, es decir, de dotarla de una organización deductiva. Hipócrates de Quíos (c. 470-c. 410), León y Teudio de Magnesia (S. IV a. C.), se ocuparon del asunto redactando "elementos"[8] y por esta tarea de sistematización debemos considerarlos auténticos precursores de Euclides. Estos ordenamientos permitieron detectar huecos en la teoría y dar pistas sobre qué teoremas hacía falta establecer para continuar el discurso geométrico.

Otro aporte, en este sentido, fue dado por Platón y los matemáticos de su escuela, la Academia[9].

> [Los platónicos] (...) se interesaron por la demostración y la metodología del razonamiento. Proclo y Diógenes Laercio (S. III d. C.)[10] atribuyeron dos tipos de metodología a los platónicos. El primero es el método del análisis (...). El segundo es el método de r*eductio ad absurdum* o de demostración indirecta (Kline, 2002: 74).

Las contribuciones de Platón al conocimiento matemático fueron principalmente de tipo filosófico; mejoró las definiciones y aumentó la rigidez lógica de los elementos. (Sarton, 1965: 536).

Esto es algo muy notable y nos enseña que si pensamos que los antiguos eran menos inteligentes que nosotros solo por haber vivido mucho antes en el tiempo, nos equivocamos por completo. Quizás deberíamos invertir lo que pensamos ya que, al contar con tan pocos recursos en comparación con los nuestros, ¿no fueron ellos quienes mayor gala hicieron de su inteligencia?

La matemática griega fue mayormente geometría –lo cual tiene su razón de ser (véase cap. 2, pág. 42)–. El ascenso de la misma se da entre los siglos VI y III a. C.; este último es el *siglo de oro*[11], el de las máximas

7 El término "escuela" debe entenderse como un grupo de personas seguidoras de un maestro y, al menos en sus etapas iniciales, con una localización geográfica particular. Son ejemplos las escuelas pitagórica y eleática (en Magna Grecia, hoy sur de Italia) y la platónica (en Atenas).

8 El término "elementos" es equivalente a "tratado" o "manual".

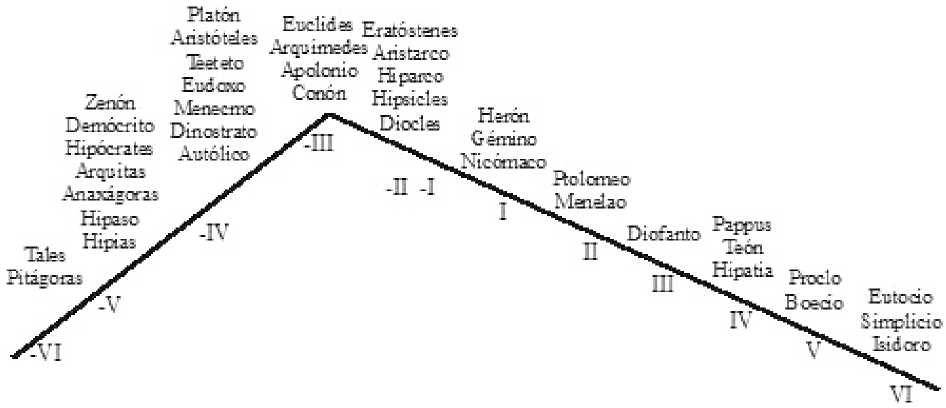
9 Platón de Atenas (427/8-347), célebre filósofo ateniense, fundó la Academia hacia 387. Esta ejerció gran influencia sobre el ambiente intelectual hasta que fue cerrada por orden del emperador Justiniano en 529 d. C. ¡Se mantuvo vigente unos nueve siglos!

10 Proclo de Bizancio (410-485) fue un filósofo neoplatónico. Diógenes Laercio (S. III d. C.) fue un griego historiador de la filosofía.

11 No hay que confundir este siglo con el de oro griego (el "de Pericles"), que fue el V a. C.

realizaciones. Luego comenzó naturalmente a declinar (si bien hubo un breve renacimiento, o *siglo de plata*) hasta ir diluyéndose gradualmente en los siglos V y VI d. C.[12]

El esquema de la Fig. 5, muy simplificado y aproximado en su escala temporal, nos da una idea de la evolución descripta y de los principales pensadores, no necesariamente matemáticos, que intervinieron. Los números romanos inferiores indican el siglo. Tal historia es en cierto aspecto abrumadora por lo extremadamente abundante, compleja y no totalmente conocida. ¡De muchos personajes solo se saben los nombres![13]



(Fig. 5) Principales protagonistas del ascenso, culmen y declinación de la matemática griega.

Euclides de Alejandría

> ¿Qué sabemos de Homero, Tales, Pitágoras, Demócrito...? Más aún: ¿qué sabemos de los arquitectos que concibieron las catedrales medievales? ¿Y de Shakespeare? Los más grandes hombres del pasado nos son desconocidos, aunque hayamos recibido sus obras y gozado de sus abundantes favores (Sarton, 1965: 35).

¿Quién fue aquél de quien nació el adjetivo “euclidiana” para la geometría? Dice G. Sarton que si preguntamos por Homero podemos esperar la respuesta “es el autor de *La Ilíada* y *La Odisea*”. Y a la inversa, si la cuestión es quién escribió esas obras, tal vez nos contesten “Homero” (Sarton, 1965: cap. III). Respecto de Euclides, estamos ante un personaje de esa talla: es el autor de los *Elementos*.

Euclides de Alejandría fue un brillante matemático que vivió en el ya mencionado siglo dorado. Ésa fue una gran centuria matemática también por Arquímedes de Siracusa, considerado por muchos el mayor genio científico de la Antigüedad y uno de los máximos de la humanidad; por Apolonio de Perga, menos conocido, autor de las *Cónicas*, y por Conón de Samos, al parecer un genial matemático del cual casi nada se sabe[14].

12 Es comprensible esta “declinación”, que no que no solo se dio por causas sociales y políticas. Los intelectuales cercanos a la matemática, posteriores a Euclides, Arquímedes y Apolonio, se dedicaron a “digerir” y comentar las monumentales obras de estos genios del siglo de oro.

13 Los nombres, en fuentes diversas, aparecen escritos de diferentes maneras; también ha habido muchos personajes con nombres iguales o similares.

14 Arquímedes (c. 287-212), Apolonio (c. 262-c. 190), Conón (c. S. III a. C.).

De Euclides se ignora casi todo. Por referencias indirectas se conoce el siglo en que vivió, el hecho de que tal vez fue educado en Atenas en la Academia, posiblemente por discípulos de Platón, y que vivió y desarrolló su actividad en Alejandría. A causa de esto lo nombramos como "Euclides de Alejandría" (a veces se lo ha confundido con Euclides de Megara, un filósofo socrático de c. 400 a. C.).

Alejandría, al norte de Egipto (Fig. 6), fundada por Alejandro Magno en 332 a. C., fue una gran metrópoli y centro cultural cosmopolita. En ella se hallaban la Biblioteca y el Museo[15], que integraban una suerte de universidad antigua[16] donde los sabios se abocaban a la enseñanza y a la investigación. Los reyes de la dinastía ptolemaica favorecieron las artes y las ciencias. Ellos fueron Ptolomeo I Soter (c. 367-283), Ptolomeo II Filadelfo (309-246) y Ptolomeo III Evergetes (c. 282-221).

(Fig. 6) Una parte del Mundo Antiguo.

Sobre la personalidad de Euclides sobreviven unas pocas anécdotas, registradas póstumamente por la tradición. Una de ellas nos cuenta que el rey Ptolomeo Soter le preguntó si en geometría había algún camino real (esto es, para los reyes). Evidentemente el soberano quería aprender por una vía más cómoda y despejada, o tal vez más corta. Pero Euclides le respondió que no hay caminos reales, no hay distinción de personas en la ciencia geométrica. Otro relato se refiere a un estudiante preguntándole qué ganaba con aprender geometría, a lo que Euclides replicó solicitándole a su

15 Museo significa "templo de las musas". Las musas, en la mitología griega, eran las deidades protectoras de las artes liberales, especialmente la poesía (DLE).

16 Algunos autores usan directamente la expresión "universidad de Alejandría". Sin embargo, esta similitud no puede llevarse lejos. Realmente las universidades fueron creadas a inicios del S. XIII d. C. (la primera fue la de Bolonia). Incluso las primeras universidades no se parecían a las nuestras, principalmente en su sintonía con la ciencia de su época.

sirviente que le entregase un óbolo[17] por cada teorema aprendido, ya que quería obtener ganancia de lo que aprendía.

La gran incertidumbre sobre fechas y detalles de Euclides, explica la expresión que puede verse en algunos textos referida a él: "*fl. 300 a. C.*". La abreviatura "*fl.*" debe leerse "floreció"; es el llamado *floruit* de la persona, es decir, su momento de mayor plenitud, actividad o madurez, en relación con aquello por lo cual es conocida. El uso de este término es una hermosa metáfora de la vida humana. Debemos florecer donde hemos sido plantados.

Los *Elementos*

Euclides escribió varias obras matemáticas, una sobre óptica y una sobre música[18]. Entre las primeras, *Elementos* (en griego: *Stoikheia*[19]) se hizo inmortal, manteniéndose vigente como libro de estudio y referencia prácticamente hasta el siglo XIX. Se dice que es el libro con mayor número de ediciones luego de la Biblia.

Admirablemente su contenido matemático sigue siendo válido. Por supuesto que la obra ha sido superada por los textos modernos, pero es natural que esto sea así ya que los matemáticos han tenido más de una veintena de siglos para superar al maestro a partir de lo que él hizo en aquella remota época.

Stoikheia está formada por trece "libros", que tratan mayormente de geometría. Por esto se la suele denominar *Elementos de geometría*. Sin embargo, también contiene aritmética y un álgebra singular utilizada por los griegos, el "álgebra geométrica". Algunas ediciones contienen dos libros más (XIV y XV), ambos apócrifos y muy posteriores a Euclides.

Al oír la expresión "trece libros" cualquiera se imagina unos cuantos tomos dispuestos en un estante; sin embargo los "libros" de este venerable trabajo son más bien como capítulos extensos de nuestros modernos textos. En este sentido podemos compararlo con la Biblia, integrada por 73 libros[20]. La palabra "libro" indica aquí más unidad de contenido que extensión.

El impacto que produjo *Elementos* en el mundo intelectual fue tan grande y duradero que caducaron, por dejar de copiarse[21], otros tratados de geometría que seguramente estaban en circulación en la época. Prácticamente desde que la obra vio la luz, con sus 467 teoremas, se la viene estudiando,

17 Moneda griega equivalente a la sexta parte de la *dracma* (DLE).

18 Aunque resulte extraño, desde los pitagóricos la música formó parte de los estudios matemáticos. Esto perduró por siglos. La aritmética, la geometría, la astronomía y la música constituían el *quadrivium* ("cuatro vías") que, sumado al *trivium* ("tres vías"): retórica, gramática y dialéctica, formaban el conjunto de las "siete artes liberales" que se estudiaba en las escuelas medievales.

19 Así anotado por el Dr. Luis Santaló en (Santaló, 1963: 5).

20 Me refiero a la Biblia católica. Otras versiones difieren en la cantidad de libros.

21 ¡Las copias eran manuscritas! Me imagino a alguien encargándole a un escriba una copia y obteniendo como respuesta "ven a buscarla en seis meses". Por supuesto que tal trabajo debía ser muy bien remunerado. Tener una copia de un tratado no estaba al alcance de cualquier persona.

analizando y comentando, generándose bajo su luz un sinnúmero de trabajos históricos, filosóficos y, por supuesto, matemáticos.

Un inolvidable aspecto fundamental es que la obra está dispuesta según el *método axiomático,* siendo el primer trabajo matemático organizado así. A partir de un conjunto reducido de verdades aceptadas sin demostración (axiomas y postulados), se deducen las demás verdades geométricas: las proposiciones o teoremas.

Lo dicho es suficiente para dejar en claro que cualquiera que se precie de ser profesor de matemática debe conocer los *Elementos* de Euclides.

Transliteraciones

Dijimos que *Elementos* en griego es *Stoikheia*. Sin embargo, en ese idioma se escribe usando su conocido alfabeto, algunas de cuyas letras más populares son α (alfa), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ε (épsilon), π (pi), ..., o bien, en mayúsculas, A, B, Γ, Δ, E, Π, ...

Al escribir *Stoikheia* estamos usando una transliteración, es decir, una correspondencia entre el alfabeto griego y el nuestro, la cual está dada por el sonido, es decir, por cómo "suena" una letra en griego y cómo "se escribe" ese sonido con nuestras letras. A veces se requiere de más de una letra para equiparar un sonido de otro alfabeto.

Para una lengua no suele haber una transliteración única. Los eruditos crean diversas transliteraciones que a veces difieren en más o menos detalles, e incluso agregan símbolos especiales para sonidos que no tienen representación con ninguna letra. Más notable que el del griego es el caso del árabe. Las palabras árabes se escriben de derecha a izquierda y sus letras son totalmente ilegibles para quien desconozca esa lengua. Si leemos sobre un matemático árabe llamado al-Kuwarizmi[22], debemos tener en cuenta que tal nombre es transliterado, y no extrañarnos si lo hallamos escrito en formas diferentes, tales como al-Khwarizmi, al-Jwarizmi, al-Juarismi, etcétera. De hecho, de una transliteración de este nombre surgió la palabra "algoritmo".

El contenido de los *Elementos*

Conviene ahora dar una breve reseña de *Stoikheia*, para formarse una idea del contenido y del nivel de sofisticación que posee. La palabra usada en el texto para "teorema" es "proposición", por lo tanto diremos que la obra completa comprende 467 proposiciones.

Los libros de *Elementos* son universalmente identificados con números romanos del I al XIII. Una proposición de *Elementos* se cita indicando el libro y el número, separados por un punto. Por ejemplo, I.47 señala la proposición 47 del Libro I, a saber... ¡el teorema de Pitágoras!

22 Al-Kuwarizmi vivió en el siglo IX. Fue uno de los grandes propulsores del álgebra y del sistema de numeración decimal posicional que provino de India. Sus obras tuvieron gran influencia en Europa.

El Libro I es el más importante desde el punto de vista epistemológico y matemático, pues en él se establece la estructura inicial, el cimiento formado por definiciones, postulados y axiomas para comenzar a construir la geometría[23]. Sus proposiciones tratan sobre triángulos, paralelogramos, suma de los ángulos interiores de un triángulo, congruencia, paralelismo, el teorema de Pitágoras y equivalencia (igualdad de área) de figuras.

El Libro II presenta proposiciones de álgebra geométrica, la cual consiste en operaciones con números representados por segmentos, y de allí toma su nombre. Por ejemplo, el producto de dos números (segmentos) a y b es representado por un rectángulo de lados a y b; y la suma de dichos números es la prolongación del segmento de longitud a en una longitud b. En el libro podemos hallar muchas de nuestras leyes de álgebra usuales (como la diferencia de cuadrados, la ley distributiva de la multiplicación respecto de la adición, el cuadrado de un binomio, etcétera) tratadas de forma completamente geométrica. Con su álgebra geométrica los griegos podían incluso resolver algunas ecuaciones lineales y cuadráticas.

Si bien el asunto es interesantísimo, excede el propósito del libro explicar por qué los griegos desarrollaron esta peculiar manera geométrica de operar con cantidades y cómo operaban concretamente con ellas. Solamente diremos que no reconocieron los números irracionales como tales, lo que les impidió el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos, y los llevó a la ingeniosa adopción de recursos geométricos que pusieron al servicio de sus necesidades algebraicas.

El Libro III trata sobre el círculo, propiedades de cuerdas, tangentes, secantes, ángulos centrales e inscritos, etcétera. El IV se ocupa de triángulos, cuadriláteros, pentágonos y hexágonos regulares, inscritos o circunscritos en círculos.

El Libro V, basado muy posiblemente en trabajos anteriores de Eudoxo de Cnido[24], es considerado el mayor logro de Euclides, y ha sido el más debatido de los trece libros. Contiene una teoría de las proporciones muy avanzada y se dedica ampliamente a las operaciones entre magnitudes, conformando una especie de teoría general de las magnitudes.

El Libro VI trata de las figuras semejantes, con base en el V. Contiene unos notables problemas llamados "de aplicación de áreas", vinculados con la parábola, la elipse y la hipérbola, si bien estas curvas no se ven en *Elementos.* Justamente Euclides escribió otra obra dedicada a ellas: *Cónicas*[25].

El Libro VII trata de teoría de números o aritmética[26], es decir, las propiedades de los números enteros positivos y sus razones. En él aparece el famoso algoritmo de Euclides para hallar el divisor común mayor de dos números y otros resultados sobre números primos.

---

23 Para esta sencilla descripción he tomado como base la excelente síntesis presentada en (Kline, 2002: cap. 4). Hay muchas otras obras que dedican espacio a descripciones similares.

24 Eudoxo (c. 408-c.350) fue un matemático y astrónomo griego sobresaliente, sin duda el mejor de su siglo. Según G. Sarton, su tiempo debería denominarse, en la historia de la ciencia, "época de Eudoxo".

25 Esta obra de Euclides no debe confundirse con una del mismo nombre debida a Apolonio de Perga. En esta última es donde aparecen por primera vez los nombres actuales de las cónicas. Los nombres "antiguos" eran "sección del cono acutángulo (o rectángulo, u obtusángulo)" para la elipse (o la parábola, o la hipérbola), por motivos que no cabe explicar aquí.

26 Palabra que proviene del griego *arithmos* = número.

La aritmética continúa en el Libro VIII, que se dedica a las progresiones geométricas, y en el Libro IX, que incluye proposiciones sobre números cuadrados, cúbicos, planos y sólidos[27]; la suma de términos de una progresión geométrica, y estos logros notabilísimos: el teorema de la factorización única de un número natural como producto de números primos, la demostración de que hay incontables números primos y el teorema que da la forma de los números perfectos pares[28].

El Libro X es uno de los más extensos y se dedica a una clasificación de cierto tipo de números irracionales (representados por segmentos). Una proposición notable es X.1, que tiene relación con el axioma hoy llamado de Arquímedes (o de Eudoxo-Arquímedes).

El Libro XI inicia el estudio de la geometría del espacio, con un tratamiento algo más pobre que el de la planimetría: planos paralelos, diedros, figuras sólidas semejantes, pirámide, prisma, esfera, cono, cilindro, poliedros regulares (convexos), etcétera.

El Libro XII contiene teoremas sobre áreas de figuras curvilíneas y volúmenes de cuerpos. Para determinar estas áreas o volúmenes se recurre a un método de demostración denominado "de exhaución"[29] atribuido a Eudoxo.

Finalmente el Libro XIII trata sobre propiedades de los polígonos y poliedros regulares (o "cuerpos platónicos") y sus inscripciones en círculos y esferas, respectivamente. Contiene la notable demostración de que existen solo cinco poliedros regulares convexos: tetraedro, octaedro, icosaedro (de 4, 8 y 20 caras triangulares equiláteras, respectivamente), el hexaedro o cubo (de 6 caras cuadradas) y el dodecaedro (de 12 caras pentagonales regulares). ¿Quién pensó que *Elementos* era una obra para principiantes?

Algunas ediciones de *Elementos* incluyeron otros dos libros: el XIV, debido a Hipsicles (c. 150 a. C.) y el XV, redactado hacia 500 d. C. tal vez por Isidoro de Mileto, famoso arquitecto vinculado con la construcción de la preciosa Hagia Sofía de Constantinopla (hoy Estambul, Turquía).

Los *Stoikheia* reúnen una gran cantidad de saber matemático, pero *no son un compendio de toda la matemática griega de la época*, como suele afirmarse insistente y erróneamente. Un contraejemplo para esto es que las secciones cónicas ya eran conocidas por los griegos en tiempos de Euclides, pero no hay rastros de ellas en los *Elementos.*

27 Esta peculiar denominación de los números (en general, "números figurados") se remonta a la escuela pitagórica, de orígenes situados en Magna Grecia (hoy sur de Italia), en la segunda mitad del S. VI a. C. Una curiosidad: en inglés aún se denomina "figures" a las cifras.

28 Un número es "perfecto" (el origen de este concepto también es pitagórico) cuando es igual a la suma de sus divisores "propios" (los menores que el mismo número). Por ejemplo, 6 es perfecto ya que es igual a la suma de 1, 2 y 3, que son sus divisores propios. Otros números perfectos son 28, 496 y 8128. Existe aún el interrogante sobre estos números de si los hay impares.

29 Hay en la literatura del tema palabras similares como *exhaustión, exhaustación,* método *exhaustivo,* etc. Todas provienen del latín *exhaustus* (= agotado).

La consideración de Euclides

A Euclides hay que valorarlo equilibradamente. Es común que a los personajes perdidos en la lejanía de los tiempos se los sobredimensione o, al contrario, se los minimice o incluso se ponga en duda su misma existencia. Una causa de esto es la carencia de fuentes escritas de primera mano y el hecho de que las tradiciones orales que se volcaron tardíamente en documentos sufrieron todo el proceso propio de un rumor: omisiones, agregados, reinterpretaciones, exageraciones, mezcla de verdad con fantasía, etcétera.

Según G. Sarton hay dos puntos de vista erróneos al considerar a Euclides. El primero es atribuirle la composición absoluta de los *Elementos*. En efecto, él heredó un frondoso acopio de conocimientos relativamente estructurados, de tres siglos anteriores, y tuvo precursores tanto en la creación de nuevo conocimiento como en su ordenamiento lógico.

El segundo punto de vista equivocado es negarle los méritos. El ordenamiento final de *Elementos,* muchas proposiciones y la notabilísima elección de los axiomas y postulados, parecen ser suyos. Euclides fue un matemático de primer nivel y esto se manifiesta en teoremas geniales que se le atribuyen, tales como IX.2, en el que demuestra que hay una infinidad de números primos, y IX.36, donde da la forma de los números perfectos pares.

Dos maneras de referirnos a la geometría euclidiana

> ¿Por qué malgastar palabras? La geometría existía antes de la Creación, es coeterna con la mente de Dios, *es el propio Dios* (lo que existe en Dios, ¿no es el propio Dios?); la geometría le proporcionó a Dios un modelo para la Creación y fue implantada en el hombre, junto con la propia semejanza con Dios, y no tan sólo llevada a su mente a través de la vista.
>
> De modo que el propio Dios era demasiado benévolo para permanecer ocioso y empezó a jugar al juego de las rúbricas, rubricando su propia imagen en el mundo: así que me arriesgo a pensar que toda la naturaleza y el elegante cielo están simbolizados en el arte de la Geometría... (Johannes Kepler en Koestler, 1986: 36, 38)[30].

Al llegar los *Elementos* al mundo de la ciencia y la cultura, además de causar verdadera sensación y de eclipsar a cualquier otro texto de geometría que estuviera merodeando por allí, la geometría quedó bautizada con el adjetivo "euclidiana". La geometría euclidiana es, entonces, la que tiene origen en los *Elementos* de Euclides.

Hasta aquí parece no haberse dicho gran cosa, sin embargo, quiero hacer esta distinción: podemos referirnos a "geometría euclidiana" desde dos puntos de vista.

En una acepción restringida la geometría euclidiana es la que está contenida en los *Elementos,* es decir, la de los libros I a XIII, que abarca desde propiedades de figuras básicas hasta los poliedros regulares. Conforme con el método axiomático, los más de cuatrocientos teoremas van surgiendo uno

30 Johannes Kepler (1571-1630), el astrónomo más revolucionario de todos los tiempos, incluso más que Copérnico y Galileo Galilei. Recomiendo al respecto la lectura de *Los sonámbulos*, del mismo Koestler.

tras otro por la aplicación de reglas de derivación lógica, a partir de los entes primitivos, los axiomas y los postulados[31]. Luego, el contenido *no puede abarcar más de lo que se obtiene deductivamente a partir de ellos*. Por lo tanto diremos que la geometría euclidiana en sentido estricto es la contenida en la obra de Euclides, y que procede de sus entes primitivos, axiomas y postulados, mediante la aplicación del método axiomático.

Podría decirse, sin embargo, que la geometría que al fin Euclides escribió, venía plasmándose con el hombre mismo, de sus contactos con los quehaceres de la vida y con la naturaleza. En efecto, la primera geometría que conoció el hombre, muchísimo antes de que se la elevara al rango de ciencia, fue la euclidiana. Esto se debió a que sus verdades básicas surgieron de la observación de la naturaleza y de simples realidades de carácter geométrico que los hombres contemplaban o producían a menudo. Las formas y movimientos naturales, como también las primeras artes plásticas y técnicas, condujeron al descubrimiento o invención de figuras y relaciones geométricas. Por ejemplo, el archiconocido axioma "dos puntos determinan una única recta a la cual pertenecen" viene sugerido por la observación de una cuerda tirante entre dos estacas o de una línea recta trazada entre dos marcas, y se aplica de manera intuitiva para alinear tres postes, por la propiedad conocida de la luz de propagarse rectilíneamente a escala terrestre[32].

En cierto modo la geometría euclidiana está implícita en los hechos habituales del espacio físico que nos rodea. Esta situación condujo naturalmente a la identificación de la geometría euclidiana con la geometría del universo, concepción que se mantuvo por siglos y que recién en épocas recientes fue cuestionada, tras el surgimiento de otras geometrías, las que pasaron a tipificarse como "no euclidianas".

Esta condición de unicidad se impuso en sus aplicaciones en el quehacer humano. Aún hoy, como cualquier matemático, ingeniero o arquitecto podría suscribir, la geometría de Euclides es clave en innumerables campos del saber y del hacer, y permite estudiar y comprender la naturaleza[33] y los objetos creados por el hombre.

Debemos considerar euclidiana en sentido amplio a la geometría que se ha desenvuelto sobre la base de la relación geometría-naturaleza. El desarrollo de la geometría euclidiana fue posible por la acción de matemáticos, investigadores, maestros, técnicos y aficionados, en las más diversas épocas y lugares, ¡incluso antes de Euclides! Los antiguos chinos, egipcios, babilonios, hindúes y mayas, aunque no hayan conocido ni a los griegos, ni a Euclides, ni a los *Stoikheia,* hicieron geometría euclidiana.

31 Si bien para nosotros las palabras "axioma" y "postulado" son equivalentes, no lo eran para Euclides. Luego se verá por qué.

32 La luz que viaja por el espacio sufre desviaciones por efecto de la gravedad cuando pasa cerca de agujeros negros y de objetos de gran masa, como las estrellas.

33 Me refiero a "naturaleza" en un sentido cotidiano. En el ámbito de algunas teorías físicas, la geometría utilizada en ellas es no euclidiana.

La geometría euclidiana después de los *Elementos*

En el periodo que va desde Euclides hasta el siglo XVII la geometría se expuso y desarrolló de manera *sintética*, es decir, yendo de lo simple a lo complejo. Se partía de axiomas y postulados (lo simple) hasta llegar a los teoremas (lo complejo)[34]. Sin embargo, en la primera mitad del S. XVII, con los trabajos de René Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665), comenzó a tomar forma la *geometría analítica* o *geometría de coordenadas,* hoy omnipresente en los planes de estudio que incluyen matemática. Bajo esta modalidad la geometría procede de lo complejo a lo simple. A partir de la ecuación de un lugar geométrico (la cual engloba su "complejidad"), obtiene las características y propiedades elementales que este posee y cuya reunión, precisamente, lo conforma y caracteriza[35].

La geometría analítica tradicional es euclidiana, ya que persiste en ella la conexión con la naturaleza, materializada un sinfín de veces en las más concretas realizaciones técnicas. Esta rama de la geometría agregó nuevos enfoques y métodos para el estudio de los mismos objetos que ocuparon a Euclides, a sus contemporáneos y a sus seguidores seculares. Y de nuevos objetos también, por supuesto.

Tanto la geometría de los griegos como la analítica estaban restringidas a las tres dimensiones de nuestro espacio físico. Correspondió a la matemática moderna la extensión de las ideas a espacios de mayor número de dimensiones, lo que, entre otras cosas, dio origen a otros objetos nuevos que no tienen representación en nuestro espacio tridimensional, tales como los hiperplanos y las bolas de dimensión 4 (o "4-esferas"), por dar dos ejemplos. También, varios matemáticos modernos, como Félix Klein (1849-1925) y David Hilbert (1862-1943), reescribieron la geometría euclidiana, obteniendo las mismas verdades a partir de un conjunto distinto de entes primitivos y axiomas.

34 *Síntesis*: Composición de un todo por reunión de sus partes (DLE).

35 *Análisis:* Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios y elementos (DLE).

[Capitulo 2]

Filosofía y geometría

Milagro en Grecia

> El hecho original del comienzo de la ciencia griega es que nos ofrece por primera vez en la historia el intento de brindarnos una interpretación puramente naturalista del universo como un todo (Farrington, 1979: 30)[1].

> Se habla con frecuencia del milagro griego, que no es sino la manera más simple de expresar nuestro asombro por las hazañas griegas y nuestra incapacidad para dar cuenta de ellas (Sarton, 1965: 157).

La denominada *escuela jónica* fue una corriente de pensamiento dominada principalmente por los filósofos milesios[2] Tales, Anaximandro y Anaxímenes (S. VI a. C.). Desde este punto en el espacio histórico surgieron pensamientos muy originales llamados a perdurar, a transformarse e influenciarse mutuamente, y a irradiarse en todas direcciones. En Jonia nacieron la filosofía y la ciencia que moldearon el pensamiento de occidente. Somos muy afortunados cuando, abarcando de un vistazo los siglos, apreciamos la pervivencia de las ideas más allá de los hombres que las concibieron.

La nota fundamental fue la búsqueda de explicaciones puramente *racionales* de los hechos y constitución del universo: cómo funcionaba y qué lo formaba. Hay que aclarar que el hombre, desde siempre se propuso explicaciones de las cosas mediante su inteligencia (no se ha de pensar que hasta la llegada de los griegos eran todos unos imbéciles, pues el atributo de la racionalidad es propio del ser humano), sin embargo a veces recurría a justificaciones basadas en misteriosas fuerzas o intervenciones divinas.

Se propuso que una *sustancia primordial*[3] constituía el mundo; para Tales era el agua; para Anaxímenes, el aire, y el ápeiron indefinido para Anaximandro. Como dijimos, se priorizaron la indagación y la explicación de los secretos del cosmos[4] en términos de argumentos inteligibles y naturales. Luego, las explicaciones que estos hombres formularon, si bien erróneas, son dignas de respeto por su seriedad intelectual. Esta postura mental no excluye a la religión. Por ejemplo, negar que un dios

1 No caiga el lector en el error de suponer que quien da una explicación naturalista es irreligioso. La religión convive con la ciencia desde siempre, aun dentro de una misma persona.

2 "Milesio" es el gentilicio de los oriundos de Mileto.

3 El *arché* o *arjé* (el "principio").

4 ¿Sabía usted que las palabras *cosmos* y *cosmética* provienen ambas del griego derivadas de un verbo que significa "ordenar", "embellecer", "ornamentar"? Ambos términos aluden a la belleza: del universo en el primer caso, de las personas, en el segundo.

intervenga como causante de una mala cosecha y buscar el origen de este mal en la naturaleza, no implica la incredulidad en la existencia de ese dios.[5]

Hacia esa época dio comienzo un peculiarísimo fenómeno cultural que desde antiguo fue llamado el "milagro griego". Este consistió en que, en el corto lapso de tres siglos (del VI al III a. C.), surgieron en el mundo griego la filosofía y muchas ciencias fundamentales (obviamente que en germen): astronomía, matemática, física, historia, geografía, biología, medicina, etcétera. Es difícil explicar este hecho, de allí la connotación de milagroso.

Las causas del "milagro griego" son un problema histórico sobre el que no cabe aquí explayarse, pero que no es tan insoluble como pueda parecer. Algunos historiadores dieron razones de tipo étnico: que los helenos poseían superioridad racial sobre los otros pueblos. Este punto de vista, tomado como única hipótesis posible es claramente un extremo. Sin embargo un "ingrediente" propio y especial los griegos deben haber tenido; algunos lo llaman el "genio griego". Existió también una confluencia de factores propicios: las herencias culturales de Egipto y Mesopotamia, un buen ambiente social y político, y una excelente ubicación geográfica. La realidad es una complejidad misteriosa. ¿Se habría dado un hecho similar en otra parte del mundo y con otro pueblo, reuniendo los mismos elementos favorables mencionados? ¿Quién puede saberlo?

Lo dicho hasta aquí sobre el surgimiento de la ciencia parece contradecir lo expresado en el epígrafe de Sarton (véase cap. 1, pág. 23). ¿No existe la ciencia desde que el hombre es hombre sobre la Tierra, o fue resultado de este "milagro"? El autor agregó:

> Es infantil suponer que la ciencia comenzó en Grecia; el "milagro" griego fue preparado en Egipto, Mesopotamia y, posiblemente, en otras regiones por una obra de varios milenios. La ciencia griega fue menos una invención que un renacimiento (Sarton, 1965: XV del Prefacio).

Hagamos aquí una conciliación. Si por ciencia entendemos "pensamiento científico", vale decir, un intento de explicación de algo con cierta coherencia lógica o invocando alguna causalidad, entonces el párrafo de Sarton es atinado y hay ciencia desde los albores mismos de la humanidad. Si por ciencia se entiende, en cambio, el conocimiento logrado mediante observación y razonamiento, organizado sistemáticamente, que incluye leyes o principios generales, y también la actividad tendiente al logro de tal saber, tendremos que admitir que ella comenzó en Grecia.

---

5 Justamente conforma una cierta paradoja histórica el surgimiento de este pensamiento científico en el seno de un pueblo como el griego, con una tradición religiosa profusa en dioses y supersticiones.

Filosofía

La filosofía[6] y la ciencia están entre las actividades humanas más nobles. El hombre, con ellas, ejercita con agudeza su capacidad de pensamiento profundo en búsqueda de esencias y razones; es decir, quiere responder *qués* y *porqués*. Las origina, motiva y sostiene, la capacidad de admiración[7] del hombre ante los universos físico, cultural y espiritual, que lo rodean. Dos verdaderas tragedias son estas: que las personas pierdan o nunca desarrollen su capacidad de admiración y que se haga ciencia o filosofía en pos de fines innobles, tales como la manipulación y el dominio.

La filosofía es, en una clásica definición, "el conocimiento cierto de todas las cosas a la luz de la razón, explicadas por sus causas primeras o últimas" (Casaubón, 2006: 42).

Ciencia y filosofía son saberes diferentes. Si bien al respecto no hay un acuerdo total, en base a la definición dada podemos dar las notas principales de esta diferencia, que son:[8]

a) la filosofía es un saber de todas las cosas en sus caracteres generales, mientras que las ciencias estudian *algunas* cosas o sectores de la realidad;

b) la filosofía da explicaciones por sus causas *últimas* (según el proceso ascendente del conocer) o *primeras* (en el orden del ser); las ciencias, en cambio, explican las cosas por sus causas *próximas.*

Como ejemplo concreto tenemos el caso del agua, de la que conocemos su fórmula molecular, H_2O, por la química. Mientras tanto, por la filosofía sabemos que está compuesta de materia prima y forma sustancial y que es un ente contingente. Dejamos para los lectores interesados que la curiosidad haga el resto.

Contrariamente a lo que piensan muchos, la filosofía es muy importante, pues toda cultura, de una u otra manera, se desenvuelve en una "atmósfera" filosófica, moldeada y conformada por corrientes de pensamiento vigentes en cada época. Maneras de concebir el mundo, el hombre, la vida, la moral, la ciencia, Dios, etcétera, cobran presencia y se traducen en acciones y modos de vida, debido a la influencia *cierta* de pensadores que generan ideas, de intelectuales que las repiten, reescriben y difunden, de hombres prácticos que las ponen en movimiento y de personas comunes que las beben (por lo general anodina y acríticamente) de las fuentes de donde emanan: enseñanzas, libros, medios de comunicación, discursos y clases.

De manera paradójica, una razón por la que estas concepciones se arraigan fuertemente, es que no se les da la debida importancia. La atmósfera filosófica simplemente se respira. Son comunes y folklóricas las expresiones despectivas en contra de filosofías y humanidades, diciendo livianamente que "no sirven para nada", mientras que, simultáneamente, esos críticos endebles se "tragan la pastilla" sin percatarse de ello. Nuestra cultura adolece hoy de un gran mal: juzgar el valor de algo por su utilidad, por ello las cosas que no dan un beneficio práctico o económico son menospreciadas, y

6 La palabra "filosofía" proviene del griego y significa "amor a la sabiduría".

7 "Admiración" es una palabra que en su raíz etimológica proviene del latín *mirari,* que significa "contemplar con asombro o con estupefacción", como cuando se observa algo inexplicable o de lo que no conocemos su causa. Es interesante el hecho que *mirari* también originó *miraculum,* milagro.

8 Seguimos a (Casaubón, 2006: 35-55). Este es un texto básico pero suficiente para nuestro propósito de distinguir sencillamente la filosofía y la ciencia.

entre ellas se incluye a la filosofía. Se dice: "¿para qué me sirve la filosofía?". Sus justos defensores dicen que "no sirve", esto es, que no es sierva de nadie.

Por lo dicho es inevitable que el pensamiento filosófico influya en mayor o menor grado sobre las acciones humanas, e impregne los conceptos y las conclusiones propios de las ciencias[9].

El realismo de los griegos

> ... fue característica de la filosofía y del alma griegas su adhesión al conocimiento de una realidad, accesible o no al entendimiento, pero existente en sí (Cabrera, 1949: 19).

Cuando se comenzó a filosofar en el seno de la escuela jónica, se adoptó naturalmente una concepción realista, que luego heredarán todos los filósofos griegos posteriores.

Esto no es trivial. Concebir una realidad existente, externa al hombre y siempre inteligible, es decir, posible de ser conocida por él, conformó una suerte de "matriz mental" donde se moldeó el pensamiento occidental con características propias. Bajo la influencia de otras intuiciones, la ciencia y la filosofía habrían seguramente derivado por otros derroteros. Las diferencias más sustanciales entre los pensamientos oriental y occidental provienen de que se desarrollaron en "matrices" diferentes. Por esto mismo, no es equilibrado valorar las cosas desde un exclusivo punto de vista occidental u oriental, como si uno prevaleciera sobre el otro. Al respecto, podemos comparar los siguientes dos textos que expresan estos puntos de vista diferentes.

> Desde que Aristóteles[10] sistematizara las argumentaciones lógicas mediante las leyes de la lógica clásica, estas normas han sido identificadas [por nosotros] no sólo como las que forman los preceptos del pensamiento humano, sino también como las que rigen el desarrollo de la ciencia. Han sido consideradas durante siglos como indiscutibles y, en cierta manera, han marcado el avance y los rumbos del pensamiento científico de Occidente. Ahora bien, si dichos preceptos fueran innatos y propios de la razón humana, deberían haber estado presentes en todas las culturas y épocas... No obstante, ...en algunos escenarios socioculturales hubo manifestaciones de lógicas que no aceptaban como leyes a los principios aristotélicos... (Crespo Crespo et al., 2009: 30).

> ... la tradición aristotélica, por su realismo natural y metafísico, es la que mejor responde a las exigencias del mundo y del hombre —ha sido llamada "la metafísica natural de la mente humana"— y es la posición de todo hombre cuando abandona la cátedra o cierra por unas horas su laboratorio... (Casaubón, 2006: 16).

9 Como muestra de esto invito a leer el apasionante libro de Westfall, Richard S. (1980). *La construcción de la ciencia moderna.* Barcelona: Labor, donde el autor nos ilustra sobre la pugna, en el S. XVII, de las concepciones filosóficas platónico-pitagórica y mecanicista, en su afán por fundamentar las leyes naturales. No he incluido en este libro citas de esa obra.

10 Aristóteles de Estagira (384-322), maravilloso filósofo y científico muchas veces referido como "el Estagirita". Su influencia en Occidente fue inmensa y aún su obra es estudiada. No obstante esto, la historia muestra que el "endiosamiento" de Aristóteles no ha llevado a la sociedad por buenos derroteros.

Concepciones subterráneas en *Elementos*

Pasaron unos tres siglos desde el inicio del milagro griego hasta la aparición de *Elementos*. Durante ese tiempo se gestaron y desarrollaron en el mundo heleno concepciones filosóficas y conocimientos científicos.

Una vez que vieron la luz, muy difícilmente las ideas mueren (o al menos la mayoría de ellas) aunque sus creadores desaparezcan o dejen de estar de moda. Algunas se hacen "subterráneas" y luego suelen ser remozadas por pensadores posteriores. Nos sirven de ejemplo las ideas numéricas místicas de los pitagóricos y la teoría de Empédocles[11] de los cuatro "elementos" (agua, aire, tierra y fuego), que aún hoy perduran de diversas maneras.

Cabrera en "Los *Elementos* de Euclides como exponente del «milagro griego»", nos presenta las principales vertientes de pensamiento filosófico que convergieron en la obra de Euclides, a la vez que sostiene: "La geometría de Euclides es un exponente acabado del "milagro" del pensamiento griego, cuyo fruto es nuestra cultura occidental surgida de él" (Cabrera, 1949: 73).

Una matriz para esta preparación de los *Elementos*, fue la concepción realista ya mencionada como propia del pensamiento heleno. Se exponen a continuación unas breves referencias sobre las principales concepciones "subterráneas".

El aporte pitagórico

Pitágoras de Samos[12], sabio casi mítico, fundó una sociedad filosófico-religiosa (la secta o hermandad pitagórica) en su isla natal y luego en Crotona[13]. Esta escuela fue tan influyente que sus ideas se derramaron sobre los siglos futuros.

La matemática ocupó un lugar privilegiado entre los pitagóricos ya que concibieron los números como los constituyentes íntimos del universo, en un sentido real y físico[14]. Buscaron relaciones aritméticas en todas partes, desde los asuntos humanos hasta la geometría, la música y la astronomía. Dieron impulso así a uno de los pensamientos más duraderos y poderosos de la historia humana: la interpretación de la naturaleza en términos numéricos, lo cual incidió en el modo de hacer ciencia hasta hoy. Como contrapartida, también se fortaleció la numerología, el irracional misticismo que atribuye poderes o sacralidad a los números, e influencia sobre los destinos humanos.

Los pitagóricos fundaron la teoría de números o aritmética, y generalizaron "parcialmente"[15] el teorema de Pitágoras, además de posibles estudios sobre poliedros regulares y cubrimientos del plano con polígonos.

11 Empédocles de Agrigento fue un multifacético personaje griego que vivió entre c. 490 y c. 430.

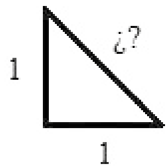
12 Pitágoras se ubica cronológicamente en la segunda mitad del siglo VI a. C.

13 Ubicada al sur de la Magna Grecia (actual sur de Italia). Véase el mapa de la Fig. 6.

14 Invito al lector a indagar sobre los "números figurados" de los pitagóricos y las asociaciones que estos establecían con las formas de figuras y cuerpos. Véase la nota 27 de este capítulo.

15 "Generalización parcial" es un oxímoron. Pero si se me permite esa expresión, con ella quiero significar que no demostraron el teorema en toda su generalidad, pero sí que encontraron su cumplimiento para

En conexión con el célebre teorema del triángulo rectángulo, descubrieron los números *irracionales*, y con esto se produjo un hecho sorprendente en la matemática: su primera crisis. Haré una breve aproximación al asunto. En el triángulo rectángulo isósceles de catetos unitarios, la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (Fig. 7).



(Fig. 7) El mortal triángulo isósceles de catetos unitarios.

De aquí que la razón (cociente) entre hipotenusa y cateto es el número irracional $\sqrt{2}$, que no era todavía concebido como tal; de hecho, se denominó "inexpresable" (*alogos*) a la longitud de esa hipotenusa. Habían entrado al escenario las cantidades inconmensurables (véase este cap., pág. 46).

> Gravísimas fueron las consecuencias de este descubrimiento matemático para la filosofía pitagórica y como consecuencia para el entendimiento del mundo por medio de la Aritmética. Aquí tiene su origen la preponderancia de la Geometría sobre la Aritmética, pues aquélla logró salvar el escollo de la razón entre cantidades conmensurables o no, mediante una nueva definición de razón y un método para encontrarla (Cabrera, 1949: 25)[16].

A pesar de este traspié, los pitagóricos aumentaron la calidad científica de la matemática. El filósofo Proclo de Bizancio en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides,* escribió en un famoso *Sumario* (reseña de los geómetras griegos anteriores a Euclides) que Pitágoras

> ... transformó el estudio de la geometría en una educación liberal, examinando los principios de la ciencia desde su comienzo, y probando los teoremas uno tras otro, de modo permanente lógico (Cabrera, 1949:22)[17].

En el pensamiento pitagórico, más abstracto, se produjo un hecho notable: la creación, por abstracción, de entes matemáticos "perfectos" a partir de las imágenes "imperfectas" dadas por la naturaleza o construidas por el hombre. Por ejemplo, la figura impecable de un círculo podía ser generada en la mente por abstracción a partir de la forma del Sol o de un dibujo hecho con el compás. Esto llevó a pensar que la matemática era un conocimiento superior al que se obtenía por observación o experimentación.

> Una de las contribuciones griegas al concepto mismo de la matemática fue el reconocimiento consciente y el énfasis puesto en el hecho de que los objetos matemáticos, números y figuras geométricas, son abstracciones, ideas producidas por la mente y claramente distintas de

los casos en que los lados eran de longitudes n, $(n^2 - 1)/2$ y $(n^2 + 1)/2$, con n natural e impar, mayor o igual que 3. Luego en época de Platón se daría el caso para n par.

16 El escollo mencionado fue salvado por el matemático y astrónomo Eudoxo de Cnido (c. 460-c .408).

17 Téngase en cuenta que, al ser la influencia pitagórica tan extensa en el tiempo, mucho de lo que se atribuye al fundador puede bien haberse obtenido muchos años después del S. VI a. C. Tal es posiblemente el caso del descubrimiento de los irracionales.

> los objetos o imágenes físicas. (...). Sin embargo, puede que esto no fuera cierto desde el principio; Aristóteles nos dice, por ejemplo, que los pitagóricos consideraban a los números como los componentes últimos de los objetos materiales del mundo real. Así pues, los números no tenían una existencia separada de los objetos sensibles (Kline, 2002: 54).

También entre las concepciones pitagóricas encontramos una noción de espacio como "suma" de puntos y de tiempo como "suma" de instantes, postura luego combatida por la escuela filosófica eleática (véase la siguiente sección).

En síntesis, vemos en el pitagorismo una elevación de la matemática a un nivel más científico y el paulatino logro de un estatus superior que compartirá con la filosofía. Es oportuno aclarar aquí que para los griegos la matemática del cálculo ordinario no era considerada tal; se la denominó *logística.*

Empédocles, Heráclito y los eleatas

Las ideas de Empédocles sobre los cuatro "elementos": agua, aire, tierra y fuego, que ese pintoresco personaje postuló como constituyentes básicos del universo, reunidos y separados respectivamente por las fuerzas contrarias del amor y del odio, calaron muy hondo en la cultura occidental. Incluso hoy en día, en películas, literatura, teorías pseudocientíficas y desodorantes, se sigue apelando a los innegablemente atractivos "elementos". Platón y Aristóteles también hicieron aplicación de ellos en sus teorías.

Por su parte, Heráclito "el Oscuro"[18], llamado así por su lenguaje enigmático, introdujo la idea de que en el universo reinaba *el cambio permanente y ordenado.* La idea de orden fue fundamental para la base de la ciencia, pues uno de sus supuestos es que los fenómenos son regidos por leyes.

Contrariamente a esta idea de constante transformación y a las nociones pitagóricas, una escuela filosófica surgida en la ciudad de Elea (en Magna Grecia, véase el mapa de la Fig. 6), con Parménides y Zenón[19] como principales representantes, postuló la inexistencia del movimiento y del cambio, y la imposibilidad de que el espacio y el tiempo fueran discretos, o de que fueran infinitamente divisibles. Estas ideas (en las que no nos detendremos) pese a ser bastante alambicadas y reñidas con el sentido común, eran difíciles de refutar y tuvieron una enorme influencia posterior[20].

Los eleatas propusieron como lo único real un *mundo del pensamiento* o *inteligible*, del cual la llave era la razón. Lo inteligible era perfecto, inmóvil, eterno e inmutable. Ese mundo se oponía al *de apariencias* o *sensible,* en el que viven los hombres. La razón fue señalada como lo único que nos puede conducir al conocimiento real y este surgirá del razonar sin contradicciones.

> Parménides deduce que la razón es el único instrumento para descubrir quién es el ser, si el mundo es inteligible, y sienta su tesis fundamental de que las cosas fuera de nosotros son

18 Heráclito de Éfeso (536-470).

19 Parménides de Elea (nació c. de 530 a. C., con datación imprecisa); Zenón de Elea fue su discípulo.

20 Averigüe el lector interesado sobre las famosas "paradojas" de Zenón, la más célebre de las cuales es la de Aquiles y la tortuga. Otras son el estadio, la dicotomía y la flecha.

> idénticas a nuestros pensamientos de las esencias o, para decirlo más brevemente, establece la identidad *del ser con el pensar* (Cabrera, 1949: 30).

Una consecuencia de esta filosofía fue la confianza ciega en que era suficiente la introspección para descubrir la esencia de las cosas y descuidar, consecuentemente, el lado práctico-experimental de la ciencia.

Sócrates, Platón, Aristóteles

Casi todos hemos oído estos nombres (¿o no?). Estos antiguos filósofos fueron de lo más influyente en la civilización occidental. Incluso hoy sus obras se siguen estudiando[21]. Los ligó una relación pedagógica: Sócrates fue maestro de Platón y este, de Aristóteles.

Sócrates[22], si bien hizo mayormente estudios morales, aportó la idea fundamental del *concepto* o *definición*, como lo que es común e invariable a diversas representaciones de un objeto.

Un razonamiento *inductivo* es aquél que va de lo particular a lo general. Es el que aplica el estudioso que, observando un gran número de casos similares, obtiene como conclusión una afirmación general. En relación con esto,

> Dos son las cosas que se pueden atribuir a Sócrates: los razonamientos inductivos y las definiciones de lo universal; y éstas se refieren, las dos, al principio de la ciencia.
>
> (...) al observar el método geométrico consistente en abstraer de diversos objetos conceptos abstractos, reduciendo las múltiples formas sensibles a un limitado número de formas elementales, las "figuras" (...) vio que después el matemático estudia racionalmente estas figuras, trata de explicarlas, de dar su razón de ser, su esencia, obteniendo así las definiciones y las propiedades invariables de las mismas[23].

Entonces, digamos, el concepto de "flor" es lo común e invariable que tienen todas las flores, independientemente de su tamaño, color y forma.

Platón es célebre, entre otras cosas, por ser autor de una considerable cantidad de obras, entre las que sobresalen sus Diálogos, llamados así por comunicar sus doctrinas filosóficas mediante personajes que conversan y exponen sus ideas en diferentes situaciones. Algunos de ellos son *La República*, *El Banquete* y *Timeo*, por citar algunos. En Atenas, en el "jardín de Academo" (un mítico héroe de la ciudad), fundó la Academia*,* un centro de intelectualidad activo por el extensísimo periodo de novecientos años. Esta institución fue un semillero de pensadores, entre ellos muchos matemáticos. Platón reverenciaba a la matemática; abundantes son las referencias al texto que figuraba en el frontispicio de la Academia: "No entre aquí quien no sepa geometría" y al decir de Platón sobre la actividad de Dios: "Dios geometriza".

---

21 Justamente, una de las cualidades del conocimiento filosófico es su perennidad, a diferencia del científico que, en general y salvo raras excepciones, es reemplazado o modificado por otro, ante nuevos hallazgos y teorías. Un filósofo puede apoyarse hoy tranquilamente en Aristóteles, pero un médico no puede hacerlo en Galeno ni un astrónomo en Ptolomeo.

22 Sócrates de Atenas (470-399).

23 Aristóteles, *Metafísica*, XIII, 4. Ambas citas en (Cabrera, 1949: 34).

En relación con el aporte socrático, Platón consideró al concepto como suficiente para determinar la esencia de la cosa conceptualizada y le atribuyó existencia real, con las cualidades del ser de los eleatas: eterno, inmóvil e inmutable. En este contexto, llamó *Idea* a esa esencia dada por el concepto. La palabra "idea" proviene del término griego *eidea*, "aspecto, forma", y este de *eido*, "yo vi", de donde una idea es una "visión intelectual" de quien la piensa (aquí lo tenemos al filósofo adaptando una palabra del lenguaje ordinario a su necesidad de expresión filosófica; en las tempranas épocas aún no se había desarrollado un léxico específico). Surgió así la *teoría de las Ideas.* Sin extendernos mucho diremos que lo fundamental de ella es lo siguiente:

- El mundo del hombre (*sensible* o *fenoménico*) es imperfecto, cambiante e ilusorio.

- Existe un mundo de las Ideas (*inteligible*) perfecto, inmutable, inmóvil, donde están las Ideas de cada cosa. La existencia de las Ideas es la única verdaderamente real.

- Cada cosa del mundo sensible tiene su correspondiente Idea en el mundo inteligible, que es un modelo, un arquetipo[24] de ella.

- Las cosas sensibles se ajustan imperfectamente a sus modelos del mundo inteligible y existen porque "participan" en parte de las esencias de sus arquetipos. Esta es la "teoría de la participación".

Así que la única mesa realmente existente es la Idea de mesa del mundo inteligible. Las mesas que usamos a diario "son" en virtud de que aquella inaccesible mesa paradigmática les presta algo de su esencia. Luego, el conocer es un indagar a tientas, que trata de penetrar en las esencias de las cosas[25].

La matemática fue para Platón la *ciencia por excelencia*[26] porque en ella los matemáticos elucubran sobre objetos dibujados imperfectamente y obtienen por razonamiento verdades eternas como los teoremas y las propiedades de las figuras. Ninguna otra ciencia, en este sentido, es comparable con la matemática. También por esto, el filósofo consideraba indignos de la ciencia los cálculos y las mediciones de la "logística", propios de artesanos y comerciantes.

La influencia de Platón fue inmensa. Lamentablemente entre sus enseñanzas hubo muchas de neto corte pseudocientífico, aceptadas por otros sin cuestionamientos debido a la gran autoridad del filósofo. Algunos números y figuras eran considerados como dotados de propiedades o cualidades especiales. Un ejemplo notable es el de los poliedros regulares convexos: dado que sólo existen cinco, Platón vinculó cuatro de ellos (tetraedro, octaedro, icosaedro, hexaedro) a los cuatro "elementos" de Empédocles, y el quinto (el dodecaedro) a la estructura del universo[27].

---

24 Del griego *arjé* = sustancia primordial y *tipos* = modelo, de aquí que significa "el modelo principal". Arquetipo: "Modelo original y primario en un arte u otra cosa" (DLE).

25 Puede indagar el lector sobre el platónico "mito de la caverna".

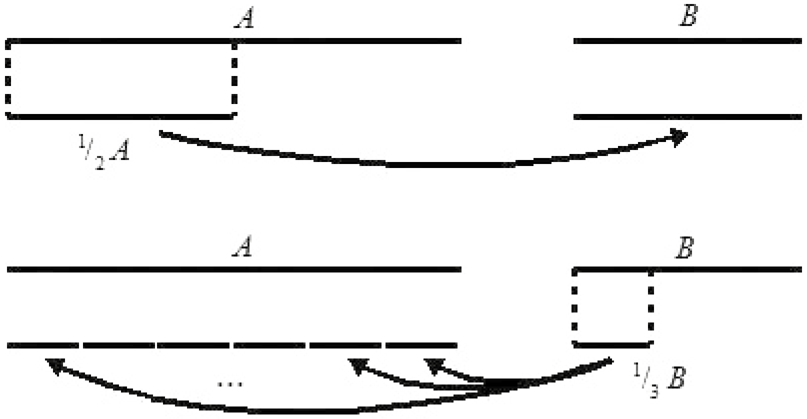
26 "Ciencia por excelencia" es una de los posibles significados de la palabra "matemática". Otra posibilidad es "aquello que se aprende", que sería de origen pitagórico. De hecho, los miembros más íntimos de la secta pitagórica eran llamados *matematikoi.*

27 Por diversas "razones", el tetraedro fue asignado al fuego, el hexaedro a la tierra, el octaedro al aire y el icosaedro al agua. El lector interesado en estos asuntos puede abordar la dura lectura del *Timeo* de Platón.

Aristóteles, el gran Estagirita, no nos atrae aquí mayormente como filósofo. Fue inicialmente discípulo de Platón. Criticó luego el pensamiento de su maestro y elaboró sus propias doctrinas, llegando estas a ser tan influyentes como las platónicas. Fundó su propia escuela superior: el Liceo. Como cultores de la matemática, Aristóteles nos convoca por otra cosa: la creación de la *lógica.* En efecto, tomó como objeto de estudio *el pensamiento en sí mismo*, tratando de establecer las leyes del "pensar correcto", para que en nuestros razonamientos estemos seguros de obtener conclusiones válidas. Fundó así la lógica clásica, que expuso en un conjunto de obras denominado *Organon*[28]. Sobre esta lógica se constituyó el método axiomático, que sirvió de modelo a Euclides para la composición de sus *Elementos.*

Cantidades inconmensurables

¿Qué son las cantidades inconmensurables? Lo ilustraremos con segmentos. Sean dos segmentos que, por simplicidad, llamaremos *A* y *B* (Fig. 8).



(Fig. 8) Segmentos conmensurables.

Si dividimos *A* en partes iguales, decimos que lo hemos dividido en partes *alícuotas*[29]. Si un número entero de partes alícuotas de *A* caben en *B*, o bien, un número entero de partes alícuotas de *B* caben en *A,* entonces *A* y *B* son *conmensurables* entre sí. El cociente entre las longitudes de *A* y *B* es, en ambos casos, un número racional. En la Fig. 8, arriba, vemos que $^1/_2\,A$ cabe exactamente una vez en *B*. También (abajo) se aprecia que $^1/_3\,B$ cabe precisamente seis veces en *A*. Tenemos que (longitud de *A*)/(longitud de *B*) = 2 para este ejemplo, siendo 2 un número racional.

Si ninguna parte alícuota de *A* (o de *B*) cabe exactamente en *B* (o en *A*), los segmentos son *inconmensurables* entre sí[30]. Esto sucede, por ejemplo, si la longitud de *A* es $\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$,y la de *B* es 1. En efecto:

28 El término significa "instrumento, herramienta".

29 *Parte alícuota:* "La que mide exactamente a su todo, como 2 respecto de 4" (DLE).

30 "Inconmensurable" es "sin medida común". Otra acepción del término (para mí conceptualmente incorrecta) es "enorme, que por su gran magnitud no puede medirse" (DLE).

- Tomando *B* completo, este cabe una vez en *A* y queda sobre *A* un segmento restante de longitud 0,414213562...- Tomando sobre *A* 1,4 veces *B* (es decir 7 veces $^1/_5$ de *B*), quedará un segmento restante de longitud 0,014213562...

- Tomando sobre *A* 1,41 veces *B* (o sea 141 veces $^1/_{100}$ de *B*) nuevamente resultará un segmento-resto de medida 0,004213562..., etcétera.

Nunca habrá una cantidad de alguna parte alícuota de *B* que pueda cubrir totalmente a *A*. Cuidado, esto que se ha expuesto aquí no es una demostración de esa imposibilidad. Solo se ha mostrado un ejemplo.

El carácter noético de la matemática griega

> ... esta concepción alcanzaba a la matemática, en especial a la geometría, cuyas figuras tenían "existencia en sí" mucho más que los objetos materiales que solo "participaban" de manera imperfecta de esas formas, y que existían, justamente, por su participación (Cabrera, 1949: 19).

El pensamiento griego fue siempre tras una realidad existente en sí e humanamente inteligible, posición que ya identificamos como realismo. El saber se concebía como un conocer de totalidad, sobre la idea del cosmos como una unidad. A este saber se lo conoce como *noético.*

La matemática griega poseyó naturalmente ese carácter. Es importante comprender esta forma de pensar la matemática y, por ende, sus objetos, pues difiere sustancialmente de la nuestra. Una comparación con las ciencias de la naturaleza nos ayudará a entender mejor este aspecto. La biología, por ejemplo, estudia seres vivos que "están allí", por así decirlo, en el mundo real. Si el biólogo quiere saber más sobre cierta planta o animal, saldrá a su encuentro buscándolo en donde se halle, o bien leerá informes que otros escribieron sobre el tema, basándose en el supuesto de que hubo un contacto efectivo con el ser estudiado.

Esto no es así en la matemática tal como se la piensa y ejerce hoy. Los objetos matemáticos son creaciones de la inteligencia humana, sin existencia en el mundo físico. Por eso la matemática y sus objetos son *formales.* Una recta, un grafo o el número 3, sólo existen en nuestra mente. Aunque algunos objetos matemáticos surgen de abstracciones originadas en la naturaleza, esto no impide que luego de tal abstracción se los trate como formales. Los matemáticos también crean libremente objetos o sistemas de cosas. Esto no era así para los griegos: un triángulo, una recta o un número, gozaban de una existencia tan real como la de un árbol o un hombre. "De allí que ellos hiciesen consistir el procedimiento de la ciencia matemática en una mostración, más bien que en una demostración" (Cabrera, 1949: 9). El ente matemático griego tenía "existencia ontológica"[31], atributo que no tiene en la matemática moderna.

31 Ontología: del griego *onto,* "el ser" y *logos,*"tratado". "Parte de la metafísica que trata del ser en general y de sus propiedades trascendentales" (DRAE).

Dentro de la concepción platónica de los objetos geométricos, debemos agregar la llamativa condición que debía cumplirse para que existieran: ser construibles con regla y compás[32]. Estos instrumentos materializaban los dos movimientos considerados perfectos: el rectilíneo y el circular uniforme[33].

¿Euclides platónico?

Uno de los interrogantes asociados con el libro *Elementos* es con qué finalidad fue escrito. Esta pregunta tendría sencilla respuesta si tuviera prólogo, pero no lo tiene y todo lo que queda por hacer es elaborar hipótesis acerca de la intención original de Euclides.

Una primera suposición es que *Elementos* era un texto para escolares, pero esta queda anulada si se observa el nivel de complejidad de la obra, lo cual induce a pensar que los destinatarios eran más bien conocedores avanzados.

Una segunda hipótesis es oída a menudo y hasta el cansancio: en *Elementos* se reúne el conocimiento geométrico de la época, lo que es falso tal como se dijo más arriba (véase cap. 1, pág. 33).

Posiblemente la clave está en la filosofía. Es llamativo en la obra que su autor parece haber dejado huellas de una formación platónica, quizás recibida de discípulos del maestro ateniense. Entre esos indicios se encuentran los siguientes:

- Carencia de ejemplos y aplicaciones: esto es coherente con la concepción platónica de la matemática como ciencia pura que no debía contaminarse con usos serviles.

- Ausencia casi total de demostraciones mediante movimiento: dado que el mundo de las Ideas era perfecto, estático e inmutable, el movimiento, que es en sí un cambio de lugar en el tiempo, no tenía cabida en este mundo de arquetipos. Entre las primitivas pruebas geométricas de los matemáticos, era frecuente la demostración de la congruencia de dos figuras mediante la *superposición* de una sobre otra, operación que involucra movimiento. Es notable que Euclides evita en lo posible demostrar teoremas recurriendo a este tipo de prueba, excepto cuando no le queda más remedio, como en la Proposición I.4[34].

- Culminación en la construcción de los cuerpos platónicos: en la filosofía platónica los cinco únicos poliedros regulares convexos fueron vinculados al universo y a los cuatro "elementos" (véase este cap., pág. 45), de donde se infiere que su existencia era de una importancia metafísica evidente. El Libro XIII, que corona todo el trabajo de Euclides, trata justamente sobre estos poliedros. Si además se tiene en cuenta que la construcción con regla y compás aseguraba la existencia de las figuras

32 La regla griega no es graduada y el compás es colapsable, es decir que, levantado del papel, se cierra. Estas características torna ilegítimos en las construcciones los transportes de segmentos tomando su medida con regla o compás, como solemos hacer nosotros.

33 Esto es una hipótesis. Puede leerse en el *Timeo* de Platón la suma importancia asignada al movimiento circular uniforme.

34 Se trata de un criterio de congruencia de triángulos. Como luego se precisará, la carencia de cierto tipo de axiomas le impedía a Euclides presentar una prueba mejor en I.4.

construidas , entonces el geómetra demostraba con su obra la entidad real de esos cuerpos, surgidos impecablemente del desarrollo deductivo.

La afirmación del último ítem es una opinión. Sarton no la comparte; para él, que los poliedros regulares cierren el trabajo de Euclides es solo una consecuencia de ser ellos una coronación natural y brillante de la geometría.

> Las fantásticas especulaciones de Platón habían conferido a la teoría de los poliedros regulares una significación de naturaleza superior. Y de ahí que el conocimiento adecuado de los “cuerpos platónicos” fuese considerado por mucha gente buena como coronación de la geometría. Proclo (2ª mitad del S. V) sugirió que Euclides fue platónico, y que construyó su monumento geométrico con el propósito de explicar las figuras platónicas. Esto es claramente falso. Por supuesto que Euclides pudo ser platónico, pero pudo preferir otra filosofía o pudo evitar cuidadosamente toda implicación filosófica. La teoría de los poliedros regulares era la culminación natural de la geometría del espacio, y de ahí que los *Elementos* no podían sino terminar con ella (Sarton, 1965: 37).

Con estas consideraciones y atendiendo a la célebre advertencia de no entrar a la Academia sin saber geometría, tiene sentido suponer que *Elementos* era un texto propedéutico para estudios filosóficos superiores.

¿Filosofía en el profesorado?

¿Es importante que se estudie filosofía en las carreras de profesorado (distintas, obviamente, del profesorado en filosofía)? No en vano la matemática nació y se desarrolló junto con la filosofía y otras ciencias... Revisando planes de estudio actuales de matemática de varias universidades e institutos, he encontrado una ausencia total de materias filosóficas, o apenas unos atisbos en alguna Epistemología o Introducción a la Filosofía. Esto es una pena. En mi opinión, esta omisión (¿inocente?) trunca la posibilidad de una mejor comprensión y *humanización* de la matemática y la ciencia en general. Aparte de la formación técnica específica que debe darse, son necesarias la educación en lo pedagógico (psicología y didáctica) y en lo humanístico (ética, filosofía e historia). Quitar la filosofía acentúa el riesgo de formar técnicos en vez de docentes, a la vez que niega al futuro profesor o maestro el aprendizaje de un aspecto fundamental de nuestra cultura científica.

“Milagro griego” ¿Ciencia vs. religión?

> La búsqueda de orden y sentido en el mundo que nos rodea ha tomado diversas formas: una de ellas es la ciencia, otra es el arte y otra es la religión (...). La ciencia se ocupa principalmente de descubrir y registrar los fenómenos naturales; en tanto que las artes se ocupan de la interpretación personal y la expresión creativa; y la religión busca la fuente, el objetivo y el significado de todo lo anterior (Hewitt, 2007: 14)[35].

Puede llegar a pensarse (de hecho muchos lo piensan), a partir del ejemplo del milagro griego, que la religión es un serio obstáculo para la ciencia y que solo librándose de aquélla una civilización puede lograr un desarrollo científico de valor. Esto es un error que nos lleva al *positivismo* o *cientificismo*. Esta postura extrema solo acepta como válido el conocimiento brindado por las ciencias.

Así como el hombre es un ser inteligente y vive una vocación[36] a la verdad, y parte de la respuesta dada por él es a través de la ciencia, también es un ser con sentido estético, religioso y moral. La historia atestigua que siempre ha habido religión, arte y preocupaciones éticas.

El fin de la religión no es el logro de la verdad científica, ni el fin de la ciencia es explicarlo *todo*, incluso lo que hay en el alma del hombre y sus relaciones con la divinidad. La religión no tiene respuestas científicas y la ciencia no tiene todas las respuestas. Es tan incorrecto hacer de la religión una ciencia, como hacer de la ciencia una religión. Las claves de este asunto están en la no invasión y en la síntesis. Si hay una religión más “verdadera”, debería poder lograrse una síntesis que armonice fe y ciencia, como verdades complementarias, no opuestas. Afortunadamente hay gente que trabaja en ello.

---

35 El autor se refiere aquí sólo a las ciencias naturales, pero fácilmente puede incluirse en el argumento a la ciencia matemática.

36 “Vocación”, del latín *vocare,* “llamar”. La vocación es un llamado.

[Capítulo 3]

La organización deductiva

La lógica aristotélica

El preclaro Aristóteles, en una muestra más de su genio, tomó como tema de reflexión al mismo pensamiento: ¡la elucubración aplicada a sí misma! Intentó explicar cómo, partiendo de unas premisas dadas, se puede llegar a una conclusión válida. Dio génesis, así, a la lógica clásica o aristotélica.

Según su opinión, ese conocimiento no es una ciencia en sí, sino un medio valioso para asegurar la certeza de las conclusiones de los razonamientos puestos en juego en el ejercicio de las ciencias.

El ilustre griego estudió los fundamentos sobre los que se edifican las ciencias deductivas. Enfocó la mirada sobre razonamientos, deducciones, juicios, definiciones, axiomas, etcétera, sentando así las bases del *método axiomático*. Fue con la organización dada por este método que Euclides escribió los *Stoikheia*. La lógica fue así un eficaz "cemento" que unió los ladrillos del edificio geométrico y evitó su desgranamiento, generando una sólida estructura que se mantuvo firme por muchos siglos.

Los "ingredientes" de la organización de una ciencia deductiva, según Aristóteles, se exponen seguidamente.

Las definiciones y los entes primitivos

... es muy diferente mostrar lo que es la cosa, y demostrar que la cosa es tal cosa[1].

Podemos pensar, con cierto espíritu esquemático, que la ciencia es un *conjunto de afirmaciones sobre cosas* que, obviamente, se consideran verdaderas, al menos de manera provisional. La biología, por ejemplo, es una reunión de verdades sobre los objetos de su estudio, entre otros, las células, los animales, las plantas y el cuerpo humano. Los asertos de la ciencia de la vida están incluidos en su discurso propio, constituido por explicaciones, enunciados, definiciones, etcétera. Grandes conjuntos de afirmaciones sobre un tema constituyen una teoría acerca de un grupo de cosas o fenómenos.

Cada ciencia tiene un vocabulario propio, palabras específicas que constituyen un léxico técnico, en general poco o nada comprendido por los legos en la materia. Eso es así porque al avanzar la ciencia se generan o descubren objetos, leyes, relaciones, procedimientos, que deben ser identificados y para tal fin se les coloca un nombre. A su vez, esto es fundamental para alcanzar precisión en el lenguaje sin incurrir en vaguedades o ambigüedades. Entre otros asuntos, aquí entran en juego las definiciones de las cosas.

1 Aristóteles, *Analíticos Posteriores* II, 3, 14, (en Cabrera, 1949: 69).

La definición es un enunciado que nos dice *qué es* el objeto de que se trata, de modo que no haya duda ni confusión sobre lo que caracteriza específicamente a dicho objeto y lo hace distinguible de otro ente.

"La definición se refiere a lo que es la cosa, a la esencia... La definición es siempre afirmativa, universal y tiene por objeto la esencia de la cosa definida"[2].

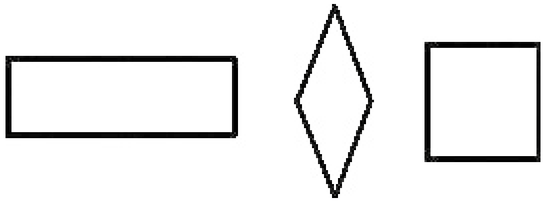
Por lo tanto, definir "cuadrado", significa enunciar qué tiene dicha figura como esencial, como propio, que la hace distinguible entre la infinidad de las otras figuras[3]. Supongamos que se dice:

"Cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes".

Aquí se establece como distintivo del cuadrado el "tener cuatro lados congruentes". Sin embargo esa característica también es poseída por el rombo, y un rombo no es necesariamente un cuadrado, luego tal definición es inexacta (véase la Fig. 9). Si se dice:

"Cuadrado es un cuadrilátero con cuatro ángulos congruentes", resulta que también un rectángulo cumple con dicha propiedad y nuevamente la definición es inapropiada. En cambio, es correcto decir:

"Cuadrado es un cuadrilátero con cuatro lados congruentes y cuatro ángulos congruentes".



(Fig. 9) Un rectángulo, un rombo y un cuadrado.

Vale remarcar que esta es *una* definición y no *la* definición de cuadrado. Efectivamente, pueden darse diversas definiciones de un mismo objeto, según a qué ente "próximo" se refiera y en qué difiera de este[4]. Hemos caracterizado al cuadrado como un tipo de cuadrilátero, cuya diferencia con los cuadriláteros en general es tener congruentes sus lados y ángulos. Pero observemos estas otras definiciones de cuadrado:

"Es el polígono regular de cuatro lados",

"Es el polígono de cuatro lados congruentes y cuatro ángulos congruentes".

2 Aristóteles, *Analíticos Posteriores* II, 3, (en Cabrera, 1949: 69).

3 En la educación científica es muy importante para la formación intelectual de los alumnos enseñarles a definir, ensayando definiciones de objetos simples. También, y sin caer en un excesivo puntillismo, es provechoso exigirles alguna que otra memorización de definiciones y que reconozcan la importancia de la precisión en los enunciados científicos.

4 En rigor se dice que la definición se debe referir al "género próximo" (o *definiendum*) seguido de la "diferencia específica" (o *definiens*). En la primera definición que hemos dado del cuadrado, el género próximo es "cuadrilátero" y la diferencia específica es "tener cuatro lados y ángulos congruentes".

En la primera el objeto “próximo” es *polígono regular*, y su especificidad es la de tener cuatro lados; en la segunda, es *polígono* y la particularidad que lo diferencia de los polígonos en general, es poseer cuatro lados y ángulos iguales.

Es interesante notar que si antes hemos definido “rombo”, podemos decir que “cuadrado es un rombo con sus ángulos rectos”. Las definiciones también dependen del ordenamiento que se les ha dado a los contenidos científicos.

El llamado *círculo vicioso* o *petición de principio* consiste en citar en una definición o demostración lo que se quiere definir o demostrar. Si decimos “cuadrado es una figura cuadrada” incurrimos en ese error, pues el adjetivo “cuadrada” hace referencia justamente a eso que queremos distinguir del cuadrado en relación con las otras figuras, y aquí no hemos afirmado nada[5].

Dijimos que en las definiciones se recurre a un objeto próximo ya definido o caracterizado en el desarrollo teórico. Si un cuadrado es un “polígono regular de cuatro lados” entonces es necesario que antes tengamos en claro qué son “polígono regular”, “polígono” y “lados”. Cualquiera de estos términos debe estar definido antes. Si los lados son “segmentos que unen dos vértices consecutivos [de una poligonal]”, todo se aclara provisoriamente. Pero ¿qué son “segmentos consecutivos” y “poligonal”? Podemos ir “hacia atrás” buscando las definiciones de objetos cada vez más elementales, por ser constitutivos de los más complejos. Sin embargo, esto no puede proseguir indefinidamente, situación de la que se percató Aristóteles.

Uno de los aciertos de este pensador fue entender que *necesariamente unos objetos deben tomarse como primeros*, sin que haya definiciones de ellos que apelen a entes anteriores. Esos objetos dados de antemano para definir los demás a partir de ellos, son los *entes primitivos* o *primeros*[6]. En la geometría, si vamos “hacia atrás” en los conceptos, llegaremos a unos entes básicos: punto, recta y plano. No obstante, como luego se verá, estos no son los únicos entes fundacionales posibles.

Aristóteles distinguió, en una primera clasificación, tres tipos de definiciones:

- Las *primeras*, son más bien descripciones de los entes primitivos y están para dar una idea de sus características distintivas. Como la definición de “punto” de Euclides: “Punto es lo que no tiene partes”[7]. Estas definiciones ya no existen en las ciencias modernas, justamente por el hecho de ser ambiguas, poco claras e, incluso, inútiles, pues no intervienen en las demostraciones.

- Las *segundas* o derivadas, manifiestan los atributos esenciales de la cosa definida, de manera tal que se distinga inequívocamente de los objetos que no son tal cosa. Estas son las definiciones a las que

5 Hágase la prueba de pedir a alguien (mejor si no es matemático) que defina “recta”. Posiblemente incurrirá en círculos viciosos al decir que es una “linea derecha” o un “conjunto de puntos alineados”.

6 Es común asociar la palabra “primitivo” con “antiguo, viejo, de los primeros tiempos”, tal como cuando nos referimos al “hombre primitivo”, pero significa realmente “primero”.

7 Libro I, Def. 1 (Cabrera, 1949: 79). Esta fue criticada por ser negativa, es decir, por caracterizar al objeto por algo que no tiene. Pero no deja por eso de ser ingeniosa.

estamos acostumbrados. Como ejemplo: “Rectas paralelas son aquellas que, estando en el mismo plano y prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, en ninguno de ellos se encuentran”[8].

- Por último, Aristóteles distingue otras definiciones que llama *silogismos*[9] *de las esencias* que, si bien son segundas, se diferencian porque en ellas el objeto definido se presenta generado a partir de otro u otros objetos. Por ejemplo, si decimos: “cuadrado es un rectángulo con lados congruentes”, se ha definido “genéticamente” al cuadrado a partir del rectángulo.

Otra clasificación de las definiciones dada por el Estagirita es la de *nominales* y *reales.* Las nominales se refieren meramente al significado de un término. Ejemplo: “Entre las figuras triláteras, el triángulo equilátero es aquel que tiene tres lados iguales; isósceles, el que tiene solo dos lados iguales; escaleno, aquel que tiene los lados desiguales”[10]. Las reales, además de dar el significado del término, aseguran que las propiedades dadas son compatibles y que la cosa definida *tal vez* exista.

Aquí se plantea el problema de la existencia de lo definido. En efecto, podemos inventar un sinnúmero de definiciones, pero ¿quién nos asegura que los objetos definidos existen?

> ... no entra en la definición la prueba de compatibilidad de las propiedades, por donde podemos distinguir una definición nominal de una real solamente si sabemos que ha sido dada una prueba acerca de la consistencia de las propiedades, o bien que el objeto definido existe, de hecho. La definición nominal anterior de un triángulo equilátero se hará real en cuanto logremos demostrar que puede construirse tal triángulo (Hausmann, 1968: 17).
>
> Las definiciones, para Aristóteles, tenían por propósito alcanzar a caracterizar la “sustancia” del nuevo objeto, o sea lo que éste tiene de “real”, cuya existencia se le agregaba mediante un postulado, o proposición existencial. Por eso una proposición totalmente nominal, es decir que asigna simplemente un nombre a una cosa, es un acto imperfecto que exige complementarse con una proposición de existencia postulada o demostrada (Cabrera, 1949: 69).

8 Esta es la definición euclidiana de rectas paralelas, Libro I, Def. 23 (Cabrera, 1949: 87). Obsérvese que Euclides menciona “prolongar” las rectas en ambos sentidos. Esto se debe a que en el pensamiento griego una recta siempre es finita, aunque potencialmente infinita por sucesivas prolongaciones. En otra geometría la definición de paralela es bien distinta de la que hemos dado aquí, como veremos luego.

9 *Silogismo:* “Argumento que consiste en tres proposiciones, la última de las cuales se deduce necesariamente de las otras dos”. (DLE). “Silogismo de las esencias” es claramente una metáfora usada por Aristóteles.

10 Libro I, Def. 20 (Cabrera, 1949: 87).

Axiomas y postulados

Según Aristóteles, además de ser necesarios unos entes primordiales para edificar sobre ellos la ciencia deductiva, también hay que aceptar unos principios referidos a dichos entes y a sus relaciones. Estos principios deben ser reconocidos como válidos sin que medie demostración.

Primeramente tenemos los *axiomas* o *nociones comunes,* que son enunciados generales, válidos para todas las ciencias y aceptados en virtud de la suma evidencia que poseen[11]. Por ejemplo: "el todo es mayor que la parte"[12], afirmación cierta en cualquier ciencia.

En segundo lugar, los *postulados,* que son enunciados particulares de cada ciencia, cuya evidencia no es tan necesaria y que son igualmente aceptados a solicitud de nuestro maestro (justamente "postular" significa "pedir, pretender, proponer"). Un ejemplo de postulado es: "Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta"[13]. Como se ve, se trata de una sentencia particular de la geometría.

Una característica importante de los postulados en el pensamiento aristotélico es que tienen como propósito, además de aportar junto con los axiomas una base inicial a la teoría, dar existencia a los entes primitivos y atribuirles características. El postulado mencionado en el párrafo anterior es, entonces, suficiente garantía de que la recta a que alude efectivamente existe. A partir de la concepción griega, la entidad real de ese objeto está asegurada por la posibilidad de construirlo con la regla y el compás (véase cap. 2, pág. 48).

Los griegos y el infinito

El infinito siempre se presentó a la mente humana como un abismo inabordable y difícilmente pensable. Razonar sobre una extensión infinita, sobre un conjunto de incontables elementos o sobre un lapso interminable de tiempo, guarda más preguntas que respuestas. Aún hoy nos cuesta entender, por ejemplo, cómo la cantidad de puntos de una recta es infinita y que también lo es la cantidad de puntos de un segmento ya que vemos que este es "limitado"; o cómo el conjunto de los números naturales y el de los naturales pares pueden ponerse en correspondencia biunívoca, siendo que... ¡este es parte de aquél! Para ordenar el infinito matemático hubo que esperar a los trabajos de aritmética transfinita de Georg Cantor (1845-1918).

Hay dos tipos de infinito: potencial y actual. Sin pretender demasiada precisión, podemos pensar el primero como el infinito que puede llegar a ser y el segundo como el que es de hecho. Pongamos por ejemplo el caso de una recta. Nosotros estamos acostumbrados a decir, casi de forma automática, que la recta *es* infinita, asignándole como característica el hecho de "no tener principio ni fin". Para nosotros, una recta es actualmente infinita*,* "en todo momento lo es" (aunque aquí el tiempo no juega ningún papel). Tomemos una "foto" de una recta en cualquier

11 "Axioma" proviene del griego (con un paso intermedio por el latín), "lo que parece justo". Este significado toma a su vez contenido del verbo "valorar".

12 Libro I, Axioma 5 (Cabrera, 1949: 96). En rigor, en matemática puede no ser cierta esta afirmación cuando tomamos cuando tomamos "todos" y "partes" infinitos (véase el recuadro en esta página).

13 Libro I, Postulado I (Cabrera, 1949: 91).

instante: la mostraría completa e infinita tal cual es (por supuesto que ignorando lo limitado del papel). Del mismo modo el conjunto N de los números naturales, un plano, una semirrecta, son actualmente infinitos en la concepción que tenemos de ellos.

En el pensamiento griego el infinito actual no tenía cabida por no considerárselo inteligible. Más bien aceptaban que algo pudiera llegar a ser infinito pero, en un instante determinado (en una "foto"), siempre sería finito. En el caso de la recta, se la consideraba prolongable indefinidamente en ambos sentidos (o sea potencialmente infinita) pero siempre finita en acto. Igualmente, no concebían los números naturales como infinitos en cantidad, sino más bien que su conjunto puede llegar a ser de tantos elementos como se desee, con solo añadir los necesarios. De aquí que no cupiera en el pensamiento griego la idea de una figura infinita, como nuestros planos y ángulos. Es por esto que en el Libro I de *Elementos* leemos:

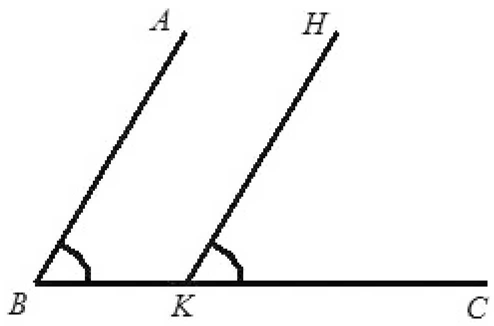
"Los extremos de una línea son puntos" (Def. 3).

"Los extremos de una superficie son líneas" (Def. 5).

"Término es el extremo de alguna cosa" (Def. 13).

"Figura es lo que está comprendido por uno o más términos" (Def. 14) (Cabrera, 1949: 82-85)[14].

En ese contexto es perfectamente válido el axioma "el todo es mayor que la parte". No podemos sostener lo mismo si aceptamos las figuras infinitas, tales como los ángulos de la Fig. 10.



(Fig. 10) El ángulo $\angle HKC$ es parte del $\angle ABC$, sin embargo, son congruentes.

14 Las definiciones 3, 5, 13 y 14 transcriptas aquí fueron tomadas de (Cabrera, 1949: 82-85).

Las proposiciones

Finalmente, en el esquema aristotélico de las ciencias deductivas que estamos describiendo, se ubican los teoremas o proposiciones, los cuales conforman la mayor parte del cuerpo de conocimientos.

Las proposiciones surgen de la aplicación de la lógica a partir de los axiomas y postulados, y se disponen en un encadenamiento de teoremas que, uno tras otro, van dejando demostradas las verdades de la ciencia en desarrollo, pudiendo ser incluidos, oportunamente, otros postulados y definiciones.

El método axiomático constituyó un modelo de sistematización deductiva que fue adoptado en lo sucesivo en otras disciplinas del conocimiento.

Resumiendo, tenemos en el ordenamiento aristotélico de una ciencia deductiva:

a. Unos entes y relaciones primitivos.

b. Unas definiciones primeras (iguales a descripciones) de dichos entes.

c. Unas definiciones segundas (o propiamente dichas) de otros objetos.

d. Unos axiomas generales.

e. Unos postulados particulares que caracterizan a los entes primitivos y sus relaciones, y les dan existencia.

f. Las proposiciones (teoremas) emanadas de ellos o de proposiciones anteriores ya demostradas.

[Capítulo 4]

Apuntes sobre el Libro I de *Elementos*

En este capítulo daremos una rápida mirada al "funcionamiento" del método axiomático en *Elementos*. Esto no solamente es interesante sino importante para poder compararlo con los enfoques modernos de la misma geometría[1]. También se intercalarán observaciones sobre asuntos de índole metodológica o epistemológica.

Las definiciones

Las definiciones primeras que escribió Euclides tienen por objeto que el lector logre idealizar los objetos básicos que va a estudiar:

1.ª: *Punto es lo que no tiene partes.*

2.ª: *Línea es una longitud sin anchura.*

3.ª: *Los extremos de una línea son puntos.*

4.ª: *Una línea recta es la que yace igualmente respecto de sus puntos.*

5.ª: *Superficie es lo que tiene solamente longitud y anchura.*

6.ª: *Los extremos de una superficie son líneas.*

7.ª: *Superficie plana es la que yace igualmente respecto de sus rectas.*

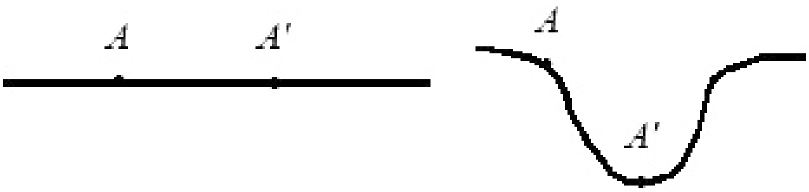
Se nota el carácter descriptivo de estas "definiciones" y su escasa claridad, aunque cumplen en parte el objetivo de que el lector se forme una idea de los entes primitivos.

Considerando la definición inicial, puede pensarse que se parte de una situación física concreta (como la marca hecha por la punta de un lápiz en un papel) e intelectualmente se la lleva al límite, para convertirla en un objeto ideal indivisible: el punto. El origen de la noción de punto geométrico (y también de línea y superficie), sería así una situación real más una abstracción.

La definición 2.ª no se refiere exclusivamente a una recta; recién en la 4.ª aparece esta noción. Sin embargo, la definición de línea recta es complicada desde el momento en que no queda bien claro

1 Existe bastante bibliografía donde se analizan los *Elementos* con distintos niveles de detalle. Por ejemplo Kline (2002), Cabrera (1949), Levi (2006). Véase la Bibliografía.

qué significa “yacer igualmente respecto de sus puntos”. Podría entenderse (entre muchas otras cosas) que desde cualquier punto de la recta, el resto de ella “se ve” igual y uniforme, o que cualquier punto es indistinguible del resto, cosa que no sucede con otras líneas. Véase la Fig. 11: si fuéramos diminutos seres sobre la recta, ya sea que estemos en *A* o en *A’*, veríamos la recta exactamente sin cambios hacia ambos lados. No sucederá lo mismo en la curva de la derecha donde, obviamente, la situación del punto *A* es diferente de la del punto *A’*.



(Fig. 11) La situación de dos puntos *A* y *A’* en una recta y en una curva cualquiera.

De todos modos, estas son solo suposiciones y la definición propuesta de línea recta es oscura, aunque meritoria. Lo mismo puede aseverarse de la definición de superficie plana (7.ª).

De las definiciones segundas que aparecen en el Libro I (Cabrera, 1949) destacamos:

8.ª: *Ángulo plano es la inclinación recíproca de líneas en un plano que tienen un punto común y que no están en una misma línea recta.*

9.ª: *Y cuando las líneas que comprenden un ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.*

15.ª: *Círculo es una figura plana comprendida por una sola línea tal que todas las rectas conducidas de un punto entre aquellos que están en el interior de la figura son iguales entre sí.*

Nótese que la 8.ª permite la extraña posibilidad de que las líneas que forman el ángulo sean curvas, mientras que de los habituales ángulos “rectilíneos” se ocupa la 9.ª. Por otra parte, la definición 8.ª incluye una redundancia al definir ángulo mediante el concepto de “inclinación”.

En la definición 15.ª las rectas son finitas, es decir, segmentos. No indica cómo se construye el círculo (en rigor, circunferencia). También es interesante la definición de figura (14.ª), citada en cap. 3, pág. 56, que excluye la posibilidad de las figuras infinitas.

Es importante la definición siguiente, considerada defectuosa por algunos antiguos comentaristas por tener una forma gramatical negativa (Bonola, 1945: 20):

23.ª: *Rectas paralelas son aquellas que estando en el mismo plano, y prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, en ninguno de ellos se encuentran.*

Hay muchas otras definiciones en el Libro I y al principio de los demás libros. Algunas difieren de las nuestras y otras son similares; algunas son correctas y otras defectuosas[2].

2 No se puede juzgar a Euclides desde la visión moderna con otro fin que no sea mejorar la calidad de nuestros conocimientos. El balance de crítica de los *Elementos* es casi totalmente a favor, con algunos

Los axiomas (o nociones comunes)

Según lo corrientemente aceptado, Euclides enunció cinco nociones comunes, aunque a lo largo de siglos de copias y copias de copias, comentarios y traducciones, se hayan añadido otras. Los cinco axiomas "tradicionales" son:

Axioma 1: *Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.*

Axioma 2: *Si a iguales se agregan iguales, los todos son iguales entre sí.*

Axioma 3: *Si a iguales se sustraen iguales, los restos son iguales.*

Axioma 4: *Cosas que coinciden entre sí son iguales.*

Axioma 5: *El todo es mayor que la parte.*

Si bien estos son generales, tienen algunas aristas matemáticas, a saber:

- El Axioma 1 puede escribirse simbólicamente:

$(a = b) \wedge (c = b) \Rightarrow a = c$

lo que denota una cierta propiedad transitiva de la igualdad. En rigor, la expresión surge de la propiedad simétrica seguida de la transitiva, o sea: $(a = b) \wedge (b = c) \Rightarrow a = c$ y, dado que $b = c \Rightarrow c = b$, resulta lo dicho.

- Los Axiomas 2 y 3 enuncian las propiedades uniformes de la adición y sustracción de cantidades, es decir, $a = b \Rightarrow a \pm c = b \pm c$.

- El Axioma 4 impone que si dos cosas se superponen de manera que todas sus partes "respectivas" coinciden, entonces son iguales. En geometría esta es la idea básica que subyace a toda congruencia. Es difícil pensar en otro tipo de "coincidencia" que no sea la superposición geométrica, razón por la cual algunos consideran que este axioma no es general (requisito exigido a los axiomas) sino propio de la ciencia que se está comenzando a desarrollar.

puntos defectuosos particulares, como es de esperar, por otra parte, para una obra de los albores de la matemática científica.

Los postulados

Uno de los puntos sobresalientes de *Stoikheia* es, justamente, la elección de los axiomas y postulados que al parecer fue del mismo Euclides. Piénsese que de ese reducido grupo de enunciados y, salvo algunos defectos y omisiones, el alejandrino logró deducir el impresionante conjunto de los trece libros.

Euclides nos presenta los siguientes postulados[3]:

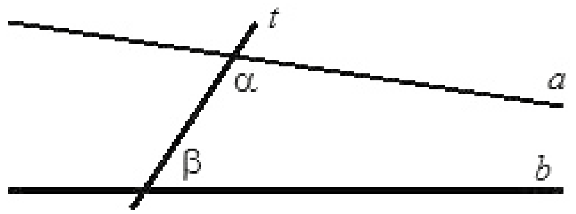
Postulado I: *Desde un punto a otro cualquiera se puede trazar una línea recta.*

Postulado II: *Se puede prolongar una línea recta indefinidamente en línea recta.*

Postulado III: *Se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier distancia*[4].

Postulado IV: *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

Postulado V: *Si una línea recta al caer sobre otras dos forma ángulos en el interior y del mismo lado de la secante menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente, se encuentran en aquella parte en la cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos* (Fig. 12).



(Fig. 12) Las rectas *a* y *b* en las condiciones del postulado; se cortan a la derecha de la figura pues $\alpha + \beta < 2R$.

A excepción del IV, nótese el carácter constructivo de los postulados, por la razón de que a través de la construcción (con regla y compás) los entes adquirían existencia ontológica.

El Postulado I aún hoy es enseñado como: *dos puntos determinan una única recta a la cual pertenecen.* El Postulado II sostiene que la recta es potencialmente infinita tal como se comentó en cap. 3, pág. 55.

El Postulado III es interesante porque en él se concede que una circunferencia puede ser de tamaño arbitrario, es decir, que no hay restricciones en la extensión de la figura. Esta falta de restricción, que por ahora parece intrascendente, dejará de serlo cuando nos adentremos en las geometrías hiperbólica y elíptica.

De los tres primeros postulados podemos inferir (aunque muy posiblemente Euclides no se preocupara por eso) que el plano posee la propiedad de ser continuo, sin agujeros ni interrupciones[5].

3 Los textos de axiomas y postulados son tomados de Cabrera (1949). De una edición a otra de los *Elementos* suelen darse notorias diferencias de términos, o, incluso, en la numeración de los mismos o en su cantidad.

4 Distancia aquí se refiere al radio de la circunferencia.

5 Es factible considerar en geometría un plano con "agujeros", por ejemplo, el que se obtiene quitando del plano R^2 los puntos cuyas coordenadas son irracionales. Véase como muestra el plano "surd" en Moise (1974: 305 y ss.). Estas construcciones teóricas son apasionantes investigaciones de los matemáticos modernos.

El Postulado IV ha sido fuente de discusiones, que no tocaremos aquí, sobre su contenido y su ubicación en el grupo de postulados. Una consideración digna de destacar es la que sostiene que, dado que en el Postulado V se menciona el ángulo recto y que este sirve de *unidad de medida y comparación*, entonces Euclides quiso aclarar que el ángulo recto es una suerte de unidad angular natural. Nada mal.

El Postulado V, que para nosotros será El Postulado de aquí en adelante, tiene un largo enunciado que, con un lenguaje más preciso, puede escribirse así: "si una recta (t) corta a otras dos (a y b), quedando formados, en uno de los semiplanos que determina, ángulos conjugados internos (α y β) cuya suma es menor que dos rectos, entonces estas rectas se encuentran en el semiplano mencionado". No necesitamos prolongar rectas, ya que para nosotros no son finitas como lo eran para Euclides.

La finalidad de este postulado es dar una condición para que dos rectas de un plano se corten. Téngase en cuenta que si la suma de α y β es cercana a dos ángulos rectos, la intersección de esas rectas puede darse realmente muy lejos de los límites del papel o pizarrón donde hemos dibujado. Consecuencia inmediata de esto es que si la suma es *exactamente* dos rectos a y b no se encuentran, son *paralelas.*

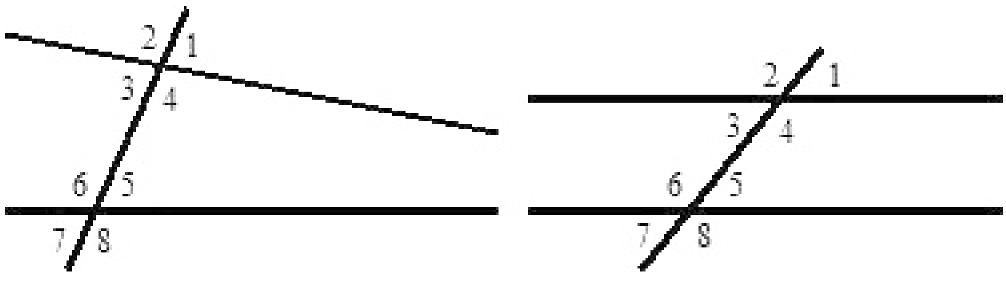
Lo que sigue es interesante a modo de adelanto. En el párrafo anterior hubiéramos podido afirmar que el objeto del postulado es fijar una condición para que a y b se corten... ¿Pero tal condición se "fija"? ¿Es una especie de "decreto"? ¿Podría haberse establecido otra condición? ¿Acaso no es natural y esperable que si los ángulos conjugados internos no suman dos rectos, las rectas se encuentran? Dejaremos estas preguntas sin respuesta por ahora.

El Postulado V será uno de los pilares de nuestras reflexiones.

El Postulado V en la enseñanza

Hago alusión aquí a los ángulos que quedan determinados cuando se tienen dos rectas que son cortadas por otra, a la que se le da el nombre de "transversal"[6].

La Fig. 13 muestra a la izquierda dos rectas oblicuas, y a la derecha dos paralelas, cortadas por sendas transversales. Hemos numerado los ocho ángulos que quedan determinados.



(Fig. 13)

6 Del latín *trans* = de un lado a otro, *versus* = dado vuelta, *al* = relativo a.

Recordemos que:

- Se llaman *externos* los ángulos $\hat{1}, \hat{2}, \hat{7}, \hat{8}$, e *internos* los $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}$.

- Son *correspondientes* (entre sí) los ángulos de cada uno de los pares $(\hat{1}, \hat{5}), (\hat{2}, \hat{6}), (\hat{3}, \hat{7}), (\hat{4}, \hat{8})$.

- *Conjugados internos* (entre sí) son los pares $(\hat{4}, \hat{5}), (\hat{3}, \hat{6})$, y *conjugados externos* los $(\hat{1}, \hat{8}), (\hat{2}, \hat{7})$.

- Son *alternos internos* (entre sí) los pares $(\hat{3}, \hat{5}), (\hat{4}, \hat{6})$, y *alternos externos* los $(\hat{2}, \hat{8}), (\hat{1}, \hat{7})$.

Comúnmente el tema se inicia mostrando el caso de las paralelas, obviándose la situación más general de las oblicuas. En este punto de la enseñanza se introduce un axioma[7]: *los ángulos correspondientes entre paralelas son congruentes* (es el caso de, por ejemplo, $\hat{1}$ y $\hat{5}$ en la Fig. 13, derecha). A partir de él es posible deducir otras relaciones entre los ángulos, tales como la congruencia de los alternos o la suplementariedad de los conjugados. Estas deducciones son instructivos teoremitas que es muy aconsejable proponer a los alumnos, a fin de que tengan un indicio de cómo trabaja el método deductivo, tan propio de la matemática.

Sin embargo, un enfoque alternativo desde la didáctica consiste en comenzar por el caso general de las oblicuas e introducir el Postulado V mencionándolo como "postulado de Euclides". A partir de ese punto se puede preguntar qué sucede si los ángulos conjugados internos suman *exactamente* dos rectos... surgiendo naturalmente así la situación de las paralelas, además de darse una ocasión para que los alumnos conozcan al viejo Euclides.

Algunas proposiciones

> Los Elementos de Euclides son una Obra tan excelente entre cuantas nos han quedado de la Antigüedad, que su conservación se debe atribuir a un especial beneficio de la Providencia.
> (Euclides-Simson, 1774)

Hay dos tipos de proposiciones en *Elementos*: problemas y teoremas. Los primeros son sobre situaciones constructivas a resolver, lo que se consigue con la regla y el compás. No son problemas de usos prácticos ni cálculos (véase cap. 2, pág. 48). Las construcciones involucradas son estáticas y conceptuales, es decir, se demuestra y legitima mediante teoremas que estas son posibles. Los segundos son enunciados matemáticos con su respectiva demostración, como los habituales, recurriéndose a la *reductio ad absurdum*[8] en muchos de ellos.

Seguidamente se transcribirán algunas proposiciones del Libro I, que nos mostrarán el modo en que discurren las demostraciones. Las nuestras abundan en simbolismo; las de Euclides, en cambio, son presentadas en estilo más descriptivo. He tomado el texto (de antiguo estilo ya que es del

7 Considérese que en la actualidad las palabras "axioma" y "postulado" son para nosotros sinónimos, razón por la cual las intercambiamos libremente.

8 El método de demostración por reducción al absurdo (o indirecto) consiste en negar la tesis y comprobar que aceptando tal negación se llega a una situación imposible. Esto lleva a que la tesis es verdadera.

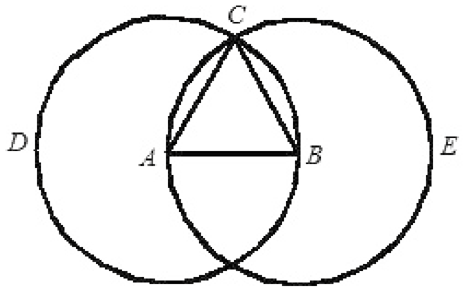
siglo XVIII) de la traducción de Robert Simson de algunos libros de *Elementos* (Euclides-Simson, 1774). Entre corchetes se aclaran algunos términos.

Proposición 1. Problema. *Sobre una recta dada terminada* [segmento] *construir un triángulo equilátero.*

Sea la recta dada terminada *AB*; y háyase de construir sobre ella un triángulo equilátero.

Con centro *A* e intervalo [radio] *AB* descríbase un círculo [circunferencia] [a] *BCD*; asimismo con centro *B* e intervalo *BA* descríbase el círculo *ACE*; y desde el punto *C*, donde se cortan mutuamente las circunferencias de los círculos, tírense [trácense] las rectas [segmentos] [b] *CA*, *CB* a los puntos *A*, *B*; y resultará el triángulo equilátero *ABC*.

Porque siendo el punto *A* centro del círculo *BCD*, será igual [c] la recta *CA* a la *AB*; asimismo siendo el punto *B* centro del círculo *CAE*, será la recta *BC* igual a la recta *AB*; y ya está demostrado, que la recta *CA* es igual a la *AB*; luego ambas rectas *CA* y *BC* son iguales a *AB*: es así que las cantidades iguales a una misma son iguales entre sí; [d] luego la recta *CA* es igual a la *BC*. Luego las tres rectas *CA*, *AB*, *BC* son iguales entre sí. Por consiguiente será *ABC* un triángulo equilátero, y estará construido sobre la recta dada terminada *AB*. Lo que debía hacerse.



(Fig. 14) Ilustración de la Proposición I.1 ("I" indica el libro y "1" el teorema).

Las letritas-superíndices remiten a la justificación de lo afirmado, a saber: [a] Postulado III, [b] Postulado I, [c] Definición 15, [d] Axioma 1.

El razonamiento es impecable, aunque podría simplificarse con el empleo de alguna notación[9].

Hay un punto débil que se objeta en este teorema: Euclides da como un hecho que las circunferencias se intersectan. Esto, en un tratamiento riguroso, sería un desajuste pues deben estar previamente establecidas las condiciones bajo las cuales esas curvas se encuentran. No obstante estamos a favor del alejandrino: "... la sutileza moderna de ver allí una propiedad topológica que es necesario demostrar o admitir explícitamente no estaba todavía en el pensamiento" (Levi, 2006: 109).

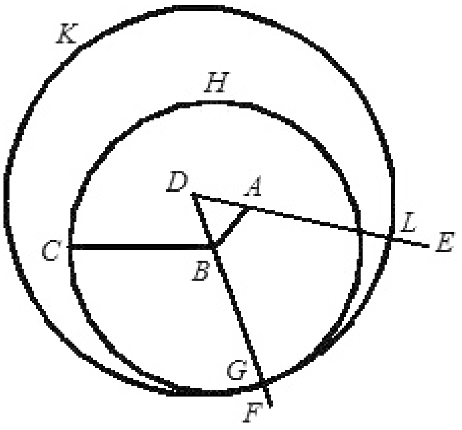
Proposición 2. Problema. *De un punto dado tirar* [construir] *una recta* [segmento] *igual a otra dada.*

Sea el punto dado *A*, y la recta dada *BC*; y háyase de tirar desde dicho punto una recta igual a la *BC*.

9 El desarrollo de la notación matemática insumió muchos siglos de esfuerzos y los ingenios de muchos. Recién hacia el siglo XVI en Europa, la notación simbólica se aproximó a la moderna. Somos afortunados por gozar de los beneficios de la potente notación simbólica actual.

Tírese desde el punto *A* al punto *B* la recta *AB*, [a] y constrúyase sobre ella un triángulo equilátero *DAB*; [b] prolónguense *DA*, y *DB*; [c] y con centro *B* e intervalo *BC* descríbase el círculo *CGH*. [d] Descríbase también con centro *D* e intervalo *DG* el círculo *GLK*, y será *AL* la recta que se pide.

Porque siendo el punto *B* centro del círculo *CGH*, será la recta *BC* igual a la *BG*. [e] Y siendo del mismo modo *D* centro del círculo *GLK*, será la recta *DL* igual a la *DG*, de las cuales la parte *DA* es igual a la parte *DB*; luego la restante *AL* será igual a la restante *BG*; [f] pero ya queda demostrado, que la *BC* es igual a la *BG*; luego una y otra *AL* y *BC* son iguales a la recta *BG*; es así que las cantidades iguales a una misma son iguales entre sí; luego también la recta *AL* es igual a la *BC*. Por consiguiente se ha tirado del punto dado *A* la recta *AL* igual a la recta dada *BC*: L. Q. D. H.



(Fig. 15) Ilustración de la Proposición I.2.

Las justificaciones (superíndices) son: [a] Postulado I, [b] Proposición I.1, [c] Postulado II, [d] Postulado III, [e] Definición 15, [f] Axioma 3. La sigla L. Q. D. H. significa "lo que debíamos hacer". En los teoremas la sigla es L. Q. D. D.: "lo que debíamos demostrar"[10].

La primera impresión que nos llevamos de este teorema es lo complicado de la construcción para un fin tan modesto como es el transporte de un segmento a partir de un punto. Nosotros efectuamos dicha operación geométrica en forma más directa con algún instrumento (un compás o una regla graduada), procedimiento que tiene su fundamentación teórica en los axiomas de congruencia[11].

El uso del compás euclidiano para transportar segmentos no estaba permitido, ya que al levantarlo del dibujo la abertura podía alterarse. Evidentemente los griegos no podían garantizar que el compás mantuviera la abertura durante su "viaje" de un punto a otro del dibujo, al ser levantado, lo cual era un asunto muy serio tratándose la geometría de una ciencia de objetos reales. Tampoco era lícita la utilización de la regla porque la misma carecía de graduación, lo cual hace impensable e impracticable tomar la medida del segmento para hacer una copia de él en otra parte.

10 En algunos textos aparece L. C. Q. H. (o D.): lo cual queríamos hacer (o demostrar), o bien, en latín Q. E. F. (o D.): *quod erat faciendum* (o *demonstrandum*).

11 Para los axiomas modernos de congruencia véase el cap. 6. Contrariamente a lo que podría parecer, el transporte de segmentos con compás es más preciso que el efectuado con regla graduada. ¡Debemos recuperar las construcciones geométricas en las aulas!

Lo dicho no implica que cada vez que había que transportar un segmento se hiciera la complicada construcción de I.2. La proposición nada más demuestra que *es posible* una construcción de un segmento congruente con otro sobre una base firme derivada de la aplicación del método axiomático. Para aclarar un poco más el sentido de estas construcciones leemos a continuación a Beppo Levi:

> En el moderno método axiomático nosotros postulamos: dado un segmento, existe uno (único) igual sobre una semirrecta arbitrariamente asignada (con un extremo en el origen de esta). (...) nosotros no nos preocupamos del modo como aquella existencia se realiza; podría ser una medición, un transportador de segmentos; lo único que nos interesa es la deducción sucesiva. Euclides, para combatir al empirista que decía "medimos" o "tendemos una soga", debía realizar la igualdad por medio de una construcción estática, una figura permanente que asegurara toda la operación, aunque fuera solo en la imaginación. El instrumento que permite efectuar la construcción es el círculo; pero no el círculo materialmente trazado por el movimiento continuo de un compás cualquiera, sino el círculo del cual el postulado 3 pide sea concedido existir con cualquier centro y por cualquier punto (Levi, 2006: 111).

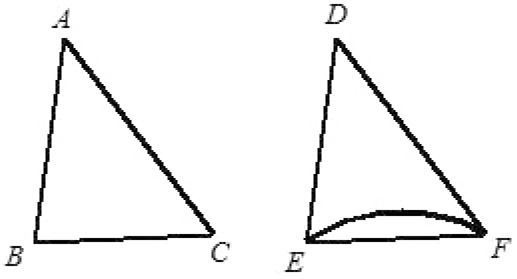
No son mencionados en la prueba los puntos *E* y *F*, pero estos son necesarios como puntos finales de las prolongaciones de las "rectas" *DA* y *DB*.

Proposición 4. Teorema. *Si dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales a dos lados del otro, e iguales los ángulos contenidos por estos lados, tendrán las bases iguales; un triángulo será igual al otro; y los demás ángulos opuestos a lados iguales serán también iguales.*

Sean dos triángulos *ABC*, *DEF*, que tengan los dos lados *AB*, *AC* respectivamente iguales a los dos *DE*, *DF*; es a saber el lado *AB* igual al *DE*, y el *AC* al *DF*; y el ángulo *BAC* igual al *EDF*. Digo, que también la base *BC* será igual a la base *EF*, el triángulo *ABC* igual al triángulo *DEF*, e iguales los demás ángulos opuestos a lados iguales; esto es, que el ángulo *ABC* será igual al *DEF*, y el *ACB* al *DFE*.

Porque sobrepuesto [superpuesto] el triángulo *ABC* al *DEF*, y colocado el punto *A* sobre el *D*, y la recta *AB* sobre la *DE*, caerá también el punto *B* sobre el *E*, por ser la línea *AB* igual a la *DE*; y por consiguiente caerá del mismo modo la recta *AC* sobre la *DF*, pues el ángulo *BAC* es igual al *EDF*; por cuya razón el punto *C* caerá sobre el *F*, siendo la recta *AC* igual a la *DF*; además de esto el punto *B* coincide con el *E*; consiguientemente la base *BC* cae sobre la base *EF*; porque si cayendo el punto *B* sobre *E*, y el *C* sobre el *F*, no cayera la base *BC* sobre la *EF*, dos rectas encerrarían espacio, lo cual es imposible; a por consecuencia todo el triángulo *ABC* se ajustará al triángulo *DEF*, y será igual a él; y los ángulos restantes se ajustarán a los restantes, siendo al mismo tiempo iguales a ellos; es a saber el ángulo *ABC* al *DEF*, y el *ACB* al *DFE*. Luego si dos triángulos tuvieren... etc. Lo que debía demostrarse[12].

12 ¡Puf! (licencia poética).

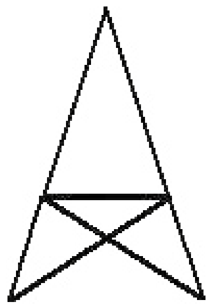


(Fig. 16) Ilustración de la Proposición I.4.

En la argumentación de esta proposición, el único superíndice ([a]) señala al "Axioma 10: *Dos líneas no encierran espacio*", incluido en Euclides-Simson (1774: 6), pero no entre los axiomas en las ediciones críticas más aceptadas de los *Elementos*. De hecho, la obra citada presenta doce axiomas.

Las pruebas por superposición son de lo más antiguo de la geometría. Bastaba con encimar las figuras y, si sus respectivas partes coincidían, se probaba su congruencia. Euclides, en el teorema anterior, recurre a este tipo de prueba, en lo que no es otra cosa que el primer criterio de congruencia de triángulos o criterio LAL (lado-ángulo-lado). Este razonamiento, que involucra el movimiento, no encaja en el contexto de los *Elementos*, donde predominan las argumentaciones estáticas y donde parece querer evitarse, precisamente, el movimiento[13]. Recuérdese que este hecho refuerza la hipótesis del platonismo de Euclides (véase cap. 2, pág. 48). Sin embargo, no había muchas opciones para él porque entre sus axiomas y postulados, ninguno se ocupaba de *relaciones entre segmentos y ángulos*, a excepción del postulado IV, insuficiente para basar en él una prueba de I.4. Según algunos autores, esta proposición habría sido originalmente una definición, luego puesta entre los teoremas por copistas o traductores; o bien se trataría de una corrupción del texto original, o de un material añadido posteriormente. Favorece a esta última opinión la presencia del citado Axioma 10, que no está en la lista clásicamente admitida de cinco axiomas.

Proposición 5. Teorema. *Los ángulos en la base del triángulo isósceles son iguales entre sí; y prolongados sus lados, serán también entre sí iguales los ángulos que están debajo de la base*[14]



(Fig. 17) Ilustración de la Proposición I.5.

13 El movimiento no admitido en la geometría es el físico, que involucra al tiempo. El movimiento geométrico, en cambio, es ajeno al tiempo y se teoriza mediante funciones o transformaciones tales como la traslación, la rotación, las simetrías, etc. Pero esto es moderno. Véase en el cap. 14 el enfoque de Puig Adam.

14 Es más correcto decir "los ángulos adyacentes al lado desigual", ya que los tres lados del triángulo pueden considerarse como bases.

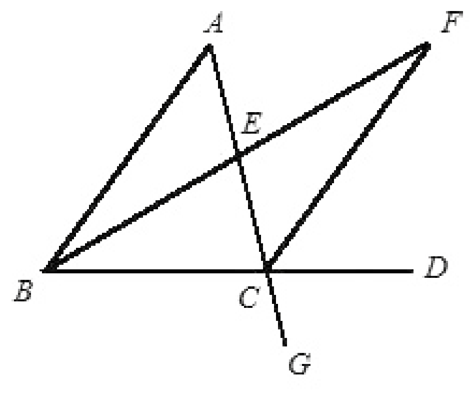
La demostración (que no incluimos) es larga y enrevesada, aunque fácil. La Proposición I.5, es denominada *pons asinorum*, o sea, “puente del asno”. En una de sus humoradas, Coxeter anota:

> El mote “pons asinorum” de este famoso teorema probablemente provenga de la apariencia de puente que tiene la figura de Euclides (con las rectas auxiliares que intervienen en su demostración bastante complicada) y de la idea de que cualquiera que no lo cruce ha de ser un borrico (Coxeter, 1971: 28).

Proposición 16. Teorema. *Prolongado un lado de cualquier triángulo, el ángulo externo es mayor que cualquiera de los internos opuestos.*

Sea el triángulo *ABC*, y prolónguese el lado *BC* hasta el punto *D*. Digo, que el ángulo externo *ACD* será mayor que cualquiera de los internos opuestos, esto es *CBA*, *BAC*. Córtese en dos partes iguales *AC* en el punto *E* (I.10)[15], y tirada la *BE*, prolónguese hasta el punto *F*, de manera que sea *EF* igual a *BE*, tírese asimismo *FC*, y prolónguese *AC* hasta el punto *G*.

Porque siendo *AE* igual a *EC*, y *BE* a *EF*, las dos *AE*, *EB* son respectivamente iguales a las dos *CE*, *EF*, y el ángulo *AEB* igual al *CEF*, por ser verticales (I.15)[16]; luego la base *AB* es igual a la base *CF*, y el triángulo *AEB* igual al *CEF*, y los demás ángulos iguales entre sí (I.4), a los cuales están opuestos lados iguales: luego el ángulo *BAE* es igual al *ECF*; es así que el *ECD* es mayor que el *ECF*; por consiguiente el *ACD* será mayor que el *BAE.* De la misma manera dividida en dos partes iguales la recta *BC*, se demostrará, que el ángulo *BCG*, esto es el *ACD* (I.15), es mayor que el *ABC.* Luego prolongado, etc. L. Q. D. D.



(Fig. 18) Ilustración de la Proposición I.16.

La siguiente proposición es clave y tendrá en lo sucesivo gran protagonismo. Recomiendo al lector que le conceda su atención y un lugarcito en su mente y corazón.

---

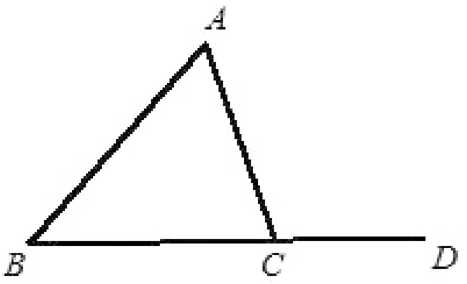
15 I.10: Problema: *dividir en dos partes iguales una recta dada terminada* [segmento]. Desde aquí pondré entre paréntesis las justificaciones que aluden a otras proposiciones.

16 I.15: Teorema: *si dos rectas se cortan mutuamente, formarán ángulos verticales* [opuestos por el vértice] *iguales entre sí.*

Proposición 17. Teorema. *Dos ángulos cualesquiera de todo triángulo tomados juntos* [sumados]*, son menores que dos rectos.*

Sea el triángulo *ABC.* Digo, que cualesquiera de sus dos ángulos tomados juntos, serán menores que dos rectos.

Prolónguese *BC* hasta *D*, y siendo *ACD* el ángulo externo del triángulo *ABC,* será mayor que el ángulo interno opuesto *ABC* (I.16); júntese a dichos dos el *ACB,* y resultará que los ángulos *ACD*, *ACB* son mayores que los *ABC*, *ACB*; es así que los *ACD*, *ACB* son iguales a dos rectos (I.13)[17]; luego los ángulos *ABC*, *BCA* son menores que dos rectos. Con el mismo método se demostrará, que los ángulos *BAC*, *ACB*, y también los *CAB, ABC* son menores que dos rectos. Por consiguiente dos ángulos, etc. L. Q. D. D.



(Fig. 19) Ilustración de la Proposición I.17.

Proposición 18. Teorema. *En todo triángulo, el ángulo opuesto a mayor lado es mayor.*

Omitimos la demostración. La finura de Euclides se pone de manifiesto en que la siguiente Proposición, la 19, es la recíproca:

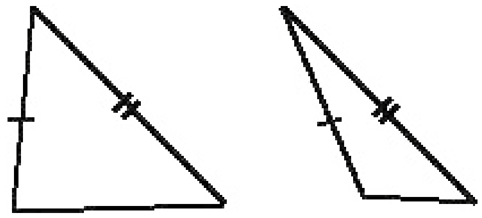
En todo triángulo el lado opuesto a mayor ángulo es mayor.

La práctica de dar un teorema y su recíproco es común en *Elementos.*

En el siguiente teorema se presenta la conocida *desigualdad triangular.*

Proposición 20. Teorema. *Dos lados cualesquiera de todo triángulo tomados juntos son mayores que el otro.*

Proposición 24. Teorema. *Si dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales a dos lados del otro, y desiguales los ángulos comprendidos, el que tenga mayor ángulo tendrá mayor base.*



(Fig. 20): Triángulos con dos lados respectivamente congruentes (Proposiciones 24 y 25).

17 I.13: Teorema: *cuando una recta insiste sobre* [= corta a] *otra, forman dos ángulos, los cuales serán, o dos rectos, o juntos iguales a dos rectos.*

Proposición 25. Teorema. *Si dos triángulos tienen dos lados del uno respectivamente iguales a dos lados del otro, y desiguales las bases, el que tenga mayor base tendrá mayor ángulo comprendido por los lados.*

El próximo teorema se refiere a nuestro segundo criterio de congruencia de triángulos (ALA = ángulo-lado-ángulo), aunque ampliado, ya que en nuestro criterio acostumbrado los ángulos son adyacentes al lado y aquí tenemos incluida una situación más:

Proposición 26. Teorema. *Si dos triángulos tuvieren dos ángulos del uno respectivamente iguales a dos ángulos del otro, y un lado igual a un lado, siendo estos los adyacentes a los ángulos iguales, o los opuestos a ángulos iguales; tendrán también los otros lados respectivamente iguales entre sí, y el otro ángulo igual al otro ángulo.*

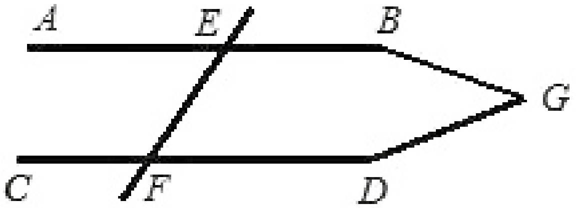
A partir de ahora Euclides incluye un grupo de teoremas relacionados con el paralelismo de rectas:

Proposición 27. Teorema. *Si una recta cayendo sobre otras dos forma los ángulos alternos iguales entre sí, estas rectas serán entre sí paralelas.*

Supóngase que cayendo la recta *EF* sobre las rectas *AB*, *CD* forma los dos ángulos alternos *AEF*, *EFD* entre sí iguales. Digo que la recta *AB* será paralela a la *CD*.

Porque si no lo fuese, prolongadas las líneas *AB*, *CD*, se encontrarían hacia *BD*[18], o *AC*; prolónguense y encuéntrense hacia *BD* en el punto *G*, y resultaría el ángulo externo *AEF* del triángulo *GEF* mayor que el ángulo interno opuesto *EFG* (I.16); lo que es imposible por haberse supuesto igual, luego prolongadas las líneas *AB*, *CD* no se encontrarán hacia *BD*.

Semejantemente se demostrará que tampoco se encontrarían hacia *AC*; es así que las que nunca se encuentran son paralelas[19]; luego *AB* es paralela a *CD*. Por consiguiente si una, etc. L. Q. D. D.



(Fig. 21) Ilustración de la Proposición I.27.

Proposición 28. Teorema. *Si una recta cayendo sobre otras dos forma el ángulo externo igual al interno opuesto hacia la misma parte, o bien los ángulos internos de una misma parte iguales a dos rectos, serán las dos líneas paralelas.*

En términos actuales decimos que si se forman ángulos correspondientes iguales o conjugados internos suplementarios, las rectas cortadas por la transversal son paralelas.

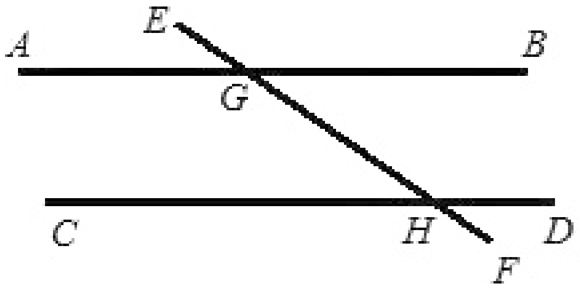
18 No es precisa la expresión "encontrarse hacia *BD*". Es mejor mencionar el semiplano de borde *EF* que contiene a *B*, por ejemplo.

19 Def. 35: Paralelas o equidistantes son las rectas que estando en un mismo plano, prolongadas por ambas partes al infinito, jamás se encontrarán. Nótese la condición de finita que caracteriza a la recta, motivo por el cual se habla de "prolongadas..." y "se encontrarán".

Proposición 29. Teorema. *Cayendo una recta sobre dos paralelas, formará los ángulos alternos iguales entre sí, el externo igual a su interno opuesto de la misma parte, y los internos de la misma parte iguales a dos rectos*.

O sea: si una recta corta a dos paralelas determina ángulos alternos congruentes, ángulos correspondientes congruentes y ángulos conjugados suplementarios. Nótese en la siguiente prueba cómo la ausencia de notación y simbolismo hace realmente arduo su seguimiento. Pero ¡ánimo!

Caiga la recta *EF* sobre las rectas paralelas *AB*, *CD*. Digo, que formará los ángulos alternos *AGH*, *GHD* iguales entre sí; el externo *EGB* igual al interno opuesto de la misma parte *GHD*; últimamente los internos de la misma parte *BGH*, *GHD* iguales a dos rectos.



(Fig. 22) Ilustración de la Proposición I.29.

Porque si el ángulo *AGH* fuera desigual al *GHD*, uno de ellos sería mayor. Séalo el *AGH*, y júnteseles el *BGH*: resultarán los ángulos *AGH*, *BGH* mayores que los *BGH*, *GHD*; es así que los ángulos *AGH*, *BGH* son iguales a dos rectos (I.13): luego los *BGH*, *GHD* serían menores que dos rectos; pero las rectas, que con otra forman los ángulos internos de la misma parte menores que dos rectos prolongadas al infinito, se encuentran (Post. V); luego las rectas *AB*, *CD* prolongadas al infinito se encontrarían; es así, que no se encuentran, pues se supusieron paralelas; luego el ángulo *AGH* no puede ser desigual al *GHD*; luego será igual. También el ángulo *AGH* es igual al *EGB* (I.15); luego el *EGB* será igual al *GHD*; añádase el ángulo *BGH*, y resultarán los ángulos *EGB*, *BGH* iguales a los *BGH*, *GHD*; es así que los *EGB*, *BGH* son iguales a dos rectos (I.13); luego serán asimismo iguales a dos rectos los ángulos *BGH*, *GHD*. Por consiguiente cayendo etcétera L. Q. D. D.

Es esta proposición la primera en la que Euclides utiliza el Postulado V en la argumentación[20], lo cual desde siempre resultó llamativo para los matemáticos, porque hay teoremas *anteriores* al I.29 en los cuales *se lo podría haber usado*, como I.16 y I.17. Sin embargo, Euclides prefirió seguir otro camino, como si *al parecer* quisiera aplazar lo más posible su utilización. Pero esto es solo un supuesto.

> El propósito de Euclides (…) de utilizar el postulado V lo más tarde posible, se pone de manifiesto al demostrar, mucho antes, las proposiciones (16) y (17) como teoremas independientes de él[21], pudiendo haberlas demostrado como simples corolarios de esta proposición (Cabrera, 1949: 137).

20 En Euclides-Simson (1774) ese postulado figura como Axioma XII. El autor sólo considera los tres primeros postulados y luego enumera una larga lista de doce axiomas. "Nuestro" postulado IV aparece allí como Axioma XI.

21 "Teoremas independientes de él" significa que no se los utiliza en la argumentación de la prueba (véase cap. 5, pág. 86).

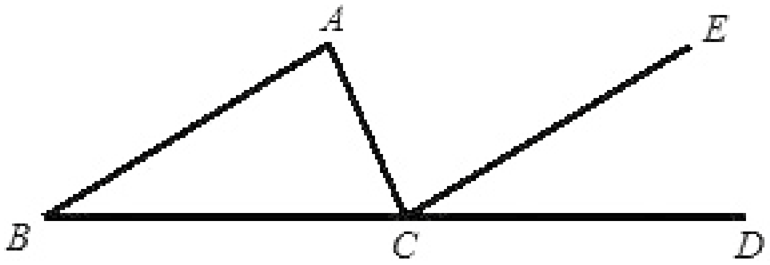
Las cuatro conocidas proposiciones que siguen parecerán al lector dignas de pocos comentarios. Sin embargo, al finalizar el itinerario propuesto entenderá mejor su significación. Nótese que desde la Proposición 27 y hasta la 31 Euclides está desarrollando la teoría euclidiana del paralelismo. La 32 incluye dos teoremas muy importantes: el del ángulo exterior y el de la suma de ángulos de un triángulo.

Proposición 30. Teorema. *Las rectas que son paralelas a una misma recta son paralelas entre sí.*

Proposición 31. Problema. *Por un punto dado tirar* [construir] *una paralela a una recta dada.*

Proposición 32. Teorema. *En todo triángulo, prolongado uno de sus lados, el ángulo externo es igual a los dos internos opuestos* [sumados]*, y los tres ángulos internos de todo triángulo* [sumados] *son iguales a dos rectos.*

Sea el triángulo *ABC* y uno de sus lados *BC* prolónguese hasta *D*. Digo que el ángulo externo *ACD* será igual a los internos opuestos *CAB*, *ABC*; y que los tres ángulos internos *ABC*, *BCA*, *CAB* del triángulo serán iguales a dos rectos.



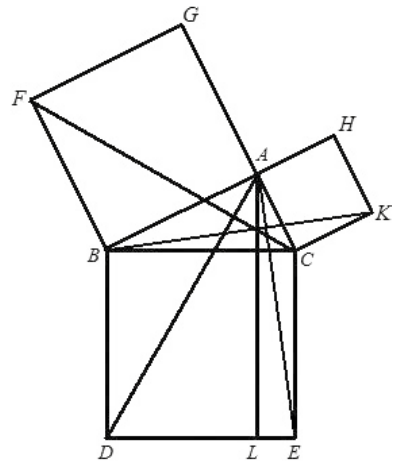
(Fig. 23) Ilustración de la Proposición I.32.

Tírese por el punto *C* la *CE* paralela (I.31) a la recta *AB*; siendo estas dos líneas paralelas, y cayendo sobre ellas la *AC*, los ángulos alternos *BAC*, *ACE* resultan entre sí iguales (I.29). Además, como *AB* es paralela a *CE*, y sobre ambas cae la recta *BD*, el ángulo externo *ECD* es igual al interno opuesto *ABC* (I.29); luego el ángulo externo *ACD* es igual a los dos internos opuestos *CAB*, *ABC*. Añádase a ambos el ángulo *ACB*, y resultarán iguales los ángulos *ACD*, *ACB* a los tres *CBA*, *BAC*, *ACB*; es así que los ángulos *ACD*, *ACB* son iguales a dos rectos (I.13); luego también los ángulos *CBA*, *BAC*, *ACB* son iguales a dos rectos. Por consiguiente en todo etcétera, L. Q. D. D.

Proposición 33. Teorema. *Las rectas* [segmentos] *que juntan* [unen] *hacia una misma parte los extremos de dos rectas* [segmentos] *iguales y paralelas, son también iguales y paralelas entre sí.*

Esto es: *los segmentos comprendidos entre segmentos iguales y paralelos son iguales y paralelos*. Este teorema establece la existencia de los paralelogramos y su conocida propiedad de tener lados opuestos congruentes y paralelos.

El Libro I finaliza con la clásica y bella demostración del teorema de Pitágoras (I.47), basada en la equivalencia de figuras, y su recíproco (I.48). No incluyo aquí dichos teoremas por no ser de interés para los fines perseguidos. Sin embargo, debe reconocerse en ellos un auténtico monumento de la humanidad, del cual la siguiente figura es un símbolo inmortal.



(Fig. 24) Ilustración de la Proposición I.47, el teorema de Pitágoras.

Mucho más puede agregarse en un análisis de *Elementos*, pero tanto se ha escrito (¡desde su aparición existen comentarios!) que no tiene sentido continuar repitiendo ideas, e invitamos al lector interesado a investigar por su cuenta el asunto.

En resumidas cuentas, hemos mostrado hasta aquí un contenido geométrico ciertamente elemental, pero cuyo tratamiento por parte de Euclides, fue muy diferente del moderno. No es la intención, sin embargo, someter inútilmente al lector a un arduo ejercicio de concentración en su seguimiento. Por ello, a modo de cierre, exponemos brevemente las razones que nos llevaron a escribirlo:

- Mostrar brevemente cómo discurren las demostraciones "al modo euclidiano", con ese estilo narrativo tan peculiar, aunque inadecuado por ser engorroso y repetitivo.

- Poner en evidencia el uso sistemático y cuidado de una argumentación basada en verdades ya aceptadas o demostradas con anterioridad (esto es, la aplicación del método axiomático), lo que también pone en relieve la sofisticación de la obra.

- Dar una idea del nivel de los contenidos abordados. No obstante, lo expuesto aquí es muestra insuficiente, pues en los demás libros se tratan asuntos bien variados y de similar o aún mayor complejidad que los del Libro I.

- Mostrar la conexión entre la geometría de objetos reales de Euclides y la filosofía, en un *saber de totalidad* (noético), donde hay razones para que una construcción o un trazado se haga de un modo y no de otro, con instrumentos determinados; donde la carencia de usos prácticos y la ausencia de movimiento obedecen a la concepción que se tenía de la matemática y sus objetos. En este contexto un teorema demostrado significaba el *descubrimiento de una verdad metafísica*. Por ejemplo, la Proposición I.10, en la que se demuestra la construcción de la mediatriz de un segmento y, por ende, la determinación de su punto medio, tiene la implicación filosófica de que un segmento admite divisibilidad infinita o, en otras palabras, que entre dos puntos de un segmento siempre hay otro.

- Dar aviso de cómo Euclides tenía ya la fina (y moderna) idea de no recurrir a un postulado a no ser que esto fuera estrictamente necesario, tal como quedó patente en las demostraciones de I.16 y I.17 sin usar el Postulado V, cosa que podría haber hecho tranquilamente y que le habría significado ahorrarse esfuerzos.

[Capítulo 5]

Algunas nociones de axiomática

Axiomas, su doble función

> Se parte de ciertas "cosas", de "elementos" que se reúnen en "conjuntos". Las propiedades de los objetos se fijan mediante un sistema de axiomas. A partir de estos axiomas se alcanza, por deducción lógica, otras proposiciones, los "teoremas" de la teoría (Meschkowski, 1967: 7).

A fin de que podamos continuar hacia nuestro objetivo, es necesario entrar ahora en contacto con algunas nociones fundamentales de la axiomática. Esta disciplina tiene por finalidad el estudio, justamente, de los axiomas y de conjuntos de ellos que constituyen los denominados "sistemas axiomáticos".

Dejemos a Euclides por un momento y ubiquémonos en la matemática moderna. No existe ahora distinción entre los conceptos de axioma y postulado (véase cap. 3, pág. 55), ambos términos se toman como sinónimos. En efecto, se verá que no hay motivo alguno para diferenciarlos.

Un *axioma* o *postulado* es un enunciado que se acepta como válido sin que medie una demostración. La mayor o menor evidencia que presenta no incide en su aceptación.

Un conjunto de axiomas que se adopta en la teoría de una ciencia deductiva a fin de fundamentarla, se denomina *sistema de axiomas*. Por lo general un grupo mayor de axiomas va al principio de la teoría y, eventualmente, durante el desarrollo se introducen otros. Diremos que dicha ciencia (o su teoría) ha sido axiomatizada. Entonces, una primera finalidad de los axiomas es fundamentar una ciencia deductiva.

Los axiomas se refieren a los entes y relaciones primitivos, que no poseen definición[1]. Hoy se prescinde de las definiciones primeras (véase cap. 3, pág. 53), porque no son verdaderas definiciones, y por ser un tanto artificiosas o ambiguas. Además, son inútiles pues no intervienen en el desarrollo de la teoría ni en las demostraciones.

Ahora bien, Euclides escribió "punto es lo que no tiene partes" y "línea es una longitud sin anchura" y, en virtud de esas definiciones primeras, nos formábamos una idea de qué son esos entes. Pero si las quitamos, ¿cómo sabremos en qué consisten los entes primitivos? La respuesta es que *de eso se encargan los axiomas*, delimitando las características que tienen y determinando cómo se vinculan unos entes primitivos con otros. A continuación se discute un caso correspondiente al campo del álgebra lineal (Grossman, 1995: 292):

1 En geometría son relaciones primitivas, por ejemplo, "pasar", "contener", "cortar", establecidas entre puntos, rectas y planos.

Un *espacio vectorial real* V es un conjunto de objetos, llamados *vectores*, junto con dos operaciones llamadas *adición*[2] y *multiplicación por un escalar* [número proveniente de un cuerpo, como puede ser R] que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación (...)

I. Si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$.

II. Para todo x, y y z en V, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

III. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$.

IV. Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en V tal que $x + (-x) = 0$.

V. Si x y y están en V, entonces $x + y = y + x$.

VI. Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$.

VII. Si x y y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

VIII. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

IX. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

X. Para cada vector $x \in V$, $1x = x$.

Lo interesante aquí es que los diez axiomas anteriores, tomados en conjunto, cumplen con el objetivo de dejarnos en claro qué se entiende por "vector". En la teoría, en vez de definir "vector" como tal o cual cosa, el sistema de axiomas es el que se encarga de decirnos lo que es, presentándonos una lista de características que poseen los objetos que llamaremos con ese nombre. Por lo tanto, si nos preguntamos ¿qué es un vector? la mejor respuesta es "todo objeto que verifica los axiomas I a X dados".

El ejemplo de los axiomas de espacio vectorial es ilustrativo, ya que hay un conjunto variado de entes que los verifican y que así se ganan el derecho de ser denominados "vectores". Entre ellos tenemos (Grossman, 1995: 293-296)[3]:

- elementos de R^2, R^3 y, en general, de R^n, es decir, los pares ordenados $(x_1; x_2)$, las ternas $(x_1; x_2; x_3)$ y las n-uplas ordenadas $(x_1; x_2; ...; x_n)$ de números reales;

- polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual a n;

- funciones reales continuas definidas en el intervalo $[0, 1]$;

- matrices de tamaño m x n con componentes reales;

- n-uplas de números complejos $(c_1; c_2; ...; c_n)$ de C^n.

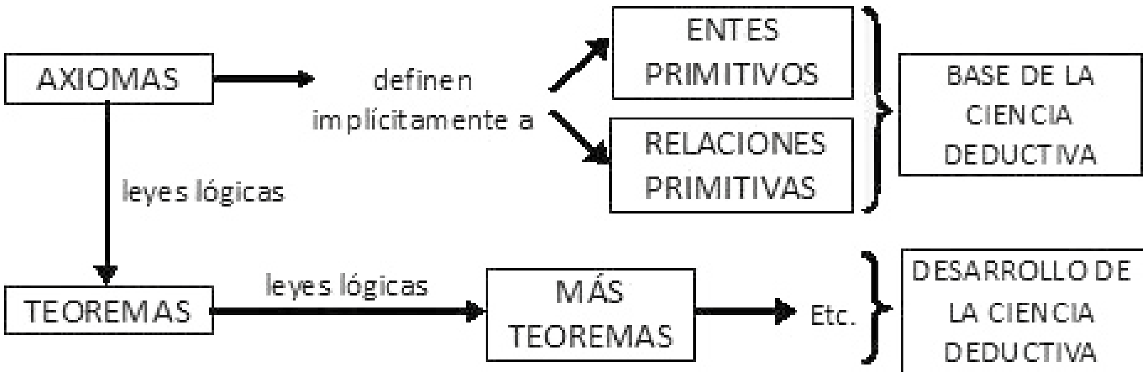
2 Si bien en el texto de Grossman en español dice "suma", es incorrecto denominar así a la operación. Su nombre es "adición", siendo "suma" su resultado.

3 Téngase en cuenta que para cada ejemplo citado corresponde considerar las operaciones adición y multiplicación, definidas particularmente para cada grupo de objetos (matrices, n-uplas, funciones, etc.).

En pos de otros ejemplos, si el lector lo desea puede explorar otros sistemas axiomáticos como el de los axiomas de Peano para los números naturales, o los postulados de grupo, anillo y cuerpo, que caracterizan a las estructuras algebraicas así denominadas[4].

Como los axiomas se refieren a los entes primitivos, decimos que ellos, actuando conjuntamente, *definen implícitamente* a dichos entes. Por esto, a través de su comprensión adquirimos la noción de qué son esos objetos, sin que sea necesario darles una definición aparte.

Tomando como punto de comienzo los postulados y aplicando las reglas de la lógica, surgen los teoremas. Estos a su vez sirven de base para otras demostraciones. De esta manera el conjunto de los teoremas se va ampliando progresivamente, como se muestra en el esquema siguiente.



La ciencia deductiva tiene entonces dos tipos de enunciados-verdades[5]:

- los que se aceptan sin demostración (axiomas), y

- los que se demuestran (teoremas).

Exceptuando las definiciones, no puede haber enunciados en la teoría que no se encuadren dentro de uno de estos dos tipos. La disciplina solo puede contener lo que puede deducirse de los axiomas.

Diversas interpretaciones de los entes primitivos

Pueden existir diferentes interpretaciones de los entes primitivos, con la sola exigencia de que satisfagan los postulados correspondientes.

Esto quiere decir, por ejemplo, que toda cosa que verifique los axiomas referidos a "rectas" podrá ser identificada como tal, aunque no concuerde con la recta clásica o intuitiva a que estamos habituados. Esto es importante, pues así el ente primitivo adquiere distintas acepciones, y esto posibilita su uso en otros campos.

4 Para aproximarse a estos temas recomiendo al lector el excelente libro *Álgebra I* de Armando Rojo.

5 Sobre qué se entiende por "verdad" en matemática, véase este cap., pág. 92.

Pongamos un momento la atención sobre el siguiente enunciado, tan común para quienes conocen la geometría analítica plana: *"Las rectas* $y = 2x + 5$ y $x + y - 2 = 0$ *concurren en el punto* $(-1; 3)$".

¿Se da cuenta el lector que estamos llamando "rectas" a unas ecuaciones lineales de ciertas características y "punto" a un par ordenado de números reales? Estamos aquí en presencia de una interpretación de esos entes primitivos.

De modo análogo tenemos las rectas como variedades lineales (en la geometría afín[6]), como un par de ecuaciones en la geometría analítica del espacio, o bien como la clásica recta euclidiana definida por su trazo en cualquier tratado de geometría sintética.

Distintos sistemas axiomáticos, una misma ciencia

Una ciencia deductiva no surge de un sistema único de axiomas. Distintos sistemas pueden fundamentarla y, por ende, generarla. Sin embargo, dado que se trata de la misma ciencia, a través de cualquier sistema de axiomas se debe llegar al mismo conjunto de enunciados.

Vamos a esquematizar un poco esto para exponer las ideas. Supongamos que representamos con GE a la geometría euclidiana. Si escribimos

$$GE = \{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k\},$$

indicamos que GE consta de un conjunto de k enunciados-verdades[7]. De estos algunos serán axiomas y otros, teoremas.

Pensemos en dos sistemas axiomáticos que simbolizaremos S_1 y S_2. Sea el primero:

$$S_1 = \{E_1, E_2, E_4, E_6, E_7, E_9, E_{10}, E_{12}\}.$$

Los ocho axiomas de S_1 son enunciados escogidos de GE admitidos sin demostración. Obsérvese que no fueron adoptados como axiomas E_3, E_5, E_8 ni E_{11}, y que serán entonces *teoremas* de GE. Escribimos

$$S_1 = \underbrace{\{E_1, E_2, E_4, E_6, E_7, E_9, E_{10}, E_{12}\}}_{\textit{axiomas}} \Rightarrow \underbrace{\{E_3, E_5, E_8, E_{11}, \ldots, E_k\}}_{\textit{teoremas}}$$

6 En una caracterización por demás breve, diremos que la geometría afín es aquélla en la que se conservan las propiedades de las figuras por proyección paralela de un plano sobre otro. En ella no valen los postulados III y IV de Euclides.

7 El avance en el conocimiento de GE consiste en ir descubriendo todas esas verdades. Nos estremece pensar que nunca se llegará a una última verdad en la geometría, en la matemática, en la ciencia. ¿Tal vez sería mejor poner $GE = \{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_k, \ldots\}$? Puede leerse en relación con esto la primera parte de Hofstadter (2007).

Sea el segundo sistema:

$S_2 = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_8, E_9\}$.

Comparándolo con S_1 vemos que hay axiomas en común, pero no todos (si no sería $S_1 = S_2$). Análogamente a lo ya hecho se tiene que

$$S_2 = \underbrace{\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_8, E_9\}}_{\textit{axiomas}} \Rightarrow \underbrace{\{E_5, E_6, E_7, E_{10}, E_{11}, E_{12}, \ldots, E_k\}}_{\textit{teoremas}}.$$

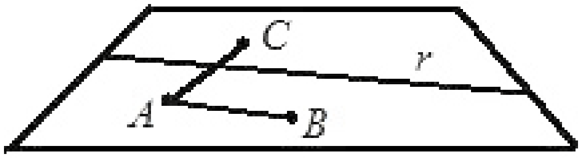
Pongamos la atención sobre E_3. Si fundamentamos GE sobre el sistema S_1, E_3 es teorema, pero si lo hacemos sobre S_2, es axioma. Los axiomas de uno de los sistemas, no comunes con el otro, deben ser teoremas de este y viceversa.

Examinemos un ejemplo concreto de lo afirmado. Sean:

- S_1 = sistema para GE propuesto por Pedro Puig Adam;

- S_2 = sistema para GE propuesto por David Hilbert[8].

En S_1 encontramos el siguiente *axioma* (no es textual, véase la Fig. 25):



(Fig. 25) El axioma de la separación del plano.

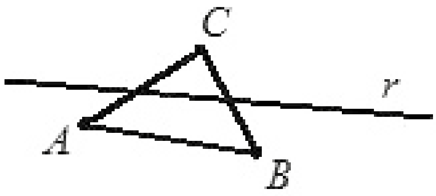
Toda recta r de un plano establece una clasificación de los puntos no contenidos en ella en dos únicas clases o regiones tales que: a) todo punto exterior a r pertenece a una u otra región; b) el segmento que une dos puntos A, B de la misma región, no corta a r; c) el segmento que une dos puntos A, C de distinta región, corta a la recta r. (Puig Adam, 1981: 9).

Este es el conocido axioma de la separación del plano por una de sus rectas. Es un axioma de orden; su objetivo es establecer un ordenamiento de los puntos del plano.

Un teorema que puede demostrarse a partir de este axioma es el siguiente:

Dados tres puntos no alineados A, B, C y una recta r de su plano que no pasa por ninguno de ellos, si r corta al segmento $\overline{AC}$ y también al segmento $\overline{BC}$, entonces no corta al segmento $\overline{AB}$ (Fig. 26).

8 Los axiomas de Hilbert se ven en el cap. 6; los de Puig Adam, en el 14.



(Fig. 26)

Demostración: dado que r corta $\overline{AC}$, A y C están en regiones distintas de las que r determina en el plano. También, como r corta a $\overline{BC}$, B y C están en regiones distintas. Y como solo son dos las regiones que r determina, significa que A y B están en la misma región. Luego r no corta a $\overline{AB}$.

En el sistema S_2 que propone Hilbert se incluye entre los postulados de orden el siguiente, denominado *axioma de Pasch*[9]:

Si A, B y C, son tres puntos no alineados y r es una recta que no contiene a ninguno de ellos, y que corta a uno de los segmentos que A, B y C determinan, entonces corta a otro de los segmentos pero no al tercero.

Se percibe claramente que este enunciado es prácticamente el mismo que el del teorema recién demostrado. A partir de este axioma, en el desarrollo de Hilbert, se demuestra el teorema de la separación del plano por una de sus rectas:

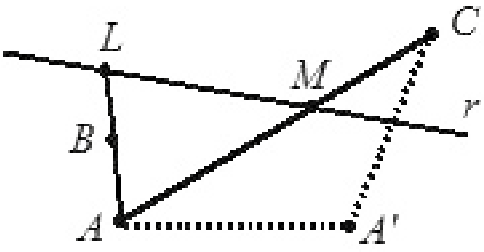
Toda recta de un plano determina en él dos regiones, de tal manera que todo punto que no pertenece a la recta pertenece a una y solo una de las regiones; dos puntos de la misma región determinan un segmento que no corta a la recta, y dos puntos de distintas regiones determinan un segmento que corta a la recta de división.

Demostración: consideremos una recta r y dos puntos distintos fuera de ella. Como dos puntos siempre determinan un segmento, solo caben dos posibilidades para esta situación: r corta o no corta al segmento. Diremos que los puntos están en distintas regiones en el primer caso y que están en la misma región en el segundo caso. Esto no es más que un criterio de clasificación de los puntos del plano en dos conjuntos y solo resta probar que ellos no son vacíos.

Sea A exterior a r y L un punto de r (Fig. 27). Por el axioma O_2 de orden existe un punto B que yace entre A y L[10] en el segmento $\overline{AL}$. Ahora r no puede cortar a $\overline{AB}$ en un punto hipotético X (no dibujado) porque la recta XL (= r) contendría al segmento $\overline{AB}$, y esto contradice que A es exterior a r. Entonces existen puntos como A y B que pertenecen a una misma región.

9 Moritz Pasch (1843-1930) fue un matemático alemán que estudió los fundamentos de la geometría. Para el axioma mencionado véase Hilbert (1902: 7) y Toranzos (1943: 137).

10 Si un punto B yace entre A y C, significa que A, B y C, están alineados. Se denota A-B-C. Aquí se mencionan axiomas de orden que están en el cap. 6.



(Fig. 27) El teorema de la separación del plano.

Sea ahora un punto M de r. El axioma O_2 de orden asegura que en la recta AM existe un punto C tal que M yace entre A y C. Estos puntos están en distintas regiones dado que r corta a $\overline{AC}$ en M.

En resumen, dados dos puntos cualesquiera fuera de r es posible decidir si están en una misma región o no. Para completar la prueba se demuestra que la situación de un punto en una región (como C) no depende del punto A tomado como referencia. Atendemos ahora al punto C y a un punto A' en la misma región de A. La recta r corta a $\overline{AC}$ y no corta a $\overline{AA'}$, de donde *debe* cortar a $\overline{A'C}$ por el axioma de Pasch. Esto significa que A' y C están en distintas regiones y la situación de C no depende de la de A, como se quería demostrar.

Con estos ejemplos queda así patente que un mismo enunciado puede ser postulado o teorema según el ordenamiento dado a la teoría a partir de un sistema particular de axiomas. Y también, como se dijo, que partiendo de distintos sistemas se arriba a las mismas verdades, por estar ambos referidos a la misma ciencia (la geometría euclidiana en este caso).

Entender esta "doble función" de los enunciados es clave para comprender relaciones que se van a establecer en la discusión del Postulado V y, más ampliamente, para entender parte del funcionamiento de la matemática.

Los axiomas equivalentes

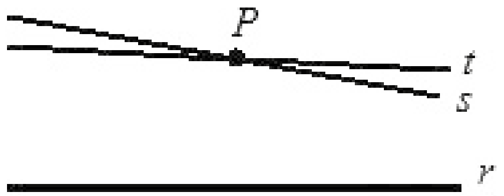
Consideremos dos enunciados matemáticos M y N. Diremos que son *absolutamente equivalentes* si cada uno de ellos se deduce del otro de manera directa, sin utilizar ningún nuevo enunciado (Bonola, 1921: 283). Por ejemplo, sean:

M: Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

N: Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella.

Veamos que $M \Rightarrow N$.

Supongamos que no se cumple N, es decir, que por un punto P exterior a una recta r no pasa una única paralela a r. Si por P tenemos las rectas $t \parallel r$ y $s \parallel r$ (Fig. 28), dado que t y s se encuentran en P entonces no son paralelas entre sí. Esto quiere decir que $\neg N \Rightarrow \neg M$, implicación que tiene el mismo valor de verdad que $M \Rightarrow N$, según lo establece la lógica proposicional.



(Fig. 28) Si $s \,//\, r$ y $t \,//\, r$, no resulta que $s \,//\, t$ si ambas pasan por P.

Demostremos ahora $N \Rightarrow M$.

Si hay dos paralelas s y t a una recta r, que no lo son entre sí, significa que s y t son secantes y, por lo tanto, se cortan en un punto que podemos llamar P. Entonces, por P hay dos paralelas a r y no una sola. Aquí tenemos $\neg M \Rightarrow \neg N$ por lo cual es cierto que $N \Rightarrow M$, y de las dos partes del teorema se obtiene que $M \Leftrightarrow N$.

La equivalencia absoluta no tiene mucho interés, porque los dos enunciados son como dos formas distintas de una misma proposición.

Hay un concepto más general de equivalencia entre M y N, que es *en relación con un sistema fundamental de axiomas*. Supongamos que tenemos un sistema de postulados que representamos como

SF = $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\}$.

A continuación incorporamos M al sistema SF, es decir, tenemos el nuevo sistema

$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k, M\}$ (1)

y, por otra parte, añadimos N al SF para obtener otro sistema más,

$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k, N\}$. (2)

Entonces, si del sistema (1) puede deducirse N y del (2) puede deducirse M, decimos que los enunciados M y N son equivalentes en relación con el sistema fundamental SF.

En resumen, M y N son *equivalentes en relación con un sistema fundamental* SF si se cumplen las dos implicaciones siguientes:

$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k, M\} \Rightarrow N$, (3)

$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k, N\} \Rightarrow M$. (4)

Nótese la importancia que tiene el sistema fundamental SF. En efecto, podría darse que modificándolo con la quita, por ejemplo, del axioma A_1, no fueran a la vez posibles las dos deducciones

$\{A_2, A_3, ..., A_k, M\} \Rightarrow N$,

$\{A_2, A_3, ..., A_k, N\} \Rightarrow M$, en cuyo caso, respecto del nuevo sistema fundamental $\{A_2, A_3, ..., A_k\}$, no serían equivalentes los enunciados M y N.

Es importante observar que en (3) M "funciona" como axioma, mientras que N es un teorema. Esta situación se invierte en (4). Sin embargo y por abuso de lenguaje, decimos que M y N son postulados equivalentes (se sobreentiende que respecto de un tal SF), pero en rigor simultáneamente no son postulados.

Requisitos de un sistema axiomático

Un sistema de axiomas debe reunir ciertas condiciones para ser de utilidad. La más importante y esencial, es la *compatibilidad* o *consistencia*. Otras, accesorias, son la *independencia* y la *saturación*.

La compatibilidad o consistencia

> Tal vez pueda expresarse el punto de vista de Hilbert y el de los formalistas de forma aún más exacta: han reemplazado la "verdad" (en sentido metafísico) por la "seguridad", seguridad en el sentido de que trabajando dentro de un sistema de axiomas, y aplicando correctamente los métodos matemáticos, jamás se pueda llegar a una contradicción (Meschkowski, 1967: 10).

Un sistema axiomático es compatible si sus axiomas no se contradicen entre sí y si a partir de ellos no se demuestran teoremas contradictorios. La compatibilidad es condición fundamental para la existencia de la ciencia deductiva que se pretende axiomatizar, pues la aparición de una contradicción la invalida completamente.

Sea S = $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\}$ un sistema de postulados. Si resulta que

$$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\} \Rightarrow P$$

y también

$$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\} \Rightarrow \neg P ,$$

entonces S es incompatible. También es inconsistente un sistema como

$$\{A_1, A_2, \neg A_2, ..., A_k\},$$

que contiene un axioma y su negación. Podría suponerse que hay que ser bastante torpe para elegir justamente un postulado contrario de otro. Pero, como tendremos oportunidad de constatar, dos postulados pueden ser en apariencia muy distintos y sin embargo tener insospechadas conexiones que conlleven a su equivalencia o bien a su contradicción.

Preguntas adecuadas para este momento son: ¿cómo estar seguros de que un sistema es compatible?, ¿cómo saber si en la seguidilla de deducciones no aparecerá un mortal teorema contradictorio?

Para asegurar la consistencia de un sistema de axiomas, no tendría sentido (ni sería posible) demostrar un teorema tras otro a la espera de una contradicción que pudiera surgir. Ante esta dificultad Hilbert propuso lo siguiente: la prueba de la compatibilidad estará dada por el hallazgo de un *modelo* o *traducción* del sistema de axiomas: un conjunto de objetos y relaciones pertenecientes a otra rama de la matemática que sea una interpretación concreta del mismo (véase este cap., pág. 77). No hallar tal modelo sería indicio de que los entes implícitamente definidos por el sistema serían inexistentes y sin significación.

De lo dicho se deriva que es suficiente con haber demostrado la consistencia de un sistema para asegurar la existencia formal de los entes definidos por él. La compatibilidad garantiza existencia.

Veamos un ejemplo con un sistema muy simple formado así:

A_1: existen infinitos puntos y rectas[11].

Definición: espacio es el conjunto de los puntos y rectas que menciona A_1.

A_2: un punto está sobre infinitas rectas.

A_3: dos puntos distintos están contenidos en una única recta.

Aquí son entes primitivos el punto y la recta. También hay una relación primitiva: "estar en", o estar contenido. Pueden usarse otras palabras, como "pasar", "pertenecer", etcétera.

Ahora vamos a traducir o interpretar este sistema mediante otros entes y otra relación, provenientes en este caso del álgebra, en una suerte de diccionario. La flecha ($\rightarrow$) indica "se traduce como".

-"Punto" $\rightarrow$ "par ordenado de números reales $(a;b)$".

-"Recta" $\rightarrow$ "ecuación lineal en dos variables $Ax + By + C = 0$ (A, B y C, números reales con A y B no simultáneamente nulos)".

De esta forma lo que llamamos "espacio" pasa a ser el espacio vectorial R^2. Por otra parte, consideraremos como una misma ecuación a cualquier ecuación múltipla de $Ax + By + C = 0$ por un número distinto de 0; por ejemplo, $2x + y - 3 = 0$ es la misma que $-4x - 2y + 6 = 0$, obtenida de $(2x + y - 3 = 0) \cdot (-2)$.

Para la relación primitiva tendremos que:

-"Estar (o pertenecer, o pasar por)" $\rightarrow$ "Verificar"

Con este diccionario podemos traducir los axiomas A_1 a A_3, así:

A_1': existen infinitos pares ordenados *de* números reales y ecuaciones de la forma $Ax + By + C = 0$.

A_2': un par ordenado de números reales verifica infinitas ecuaciones de la forma $Ax + By + C = 0$.

11 Este axioma aúna, en realidad, dos: "existen infinitos puntos" y "existen infinitas rectas".

A_3': dos pares ordenados diferentes de números reales verifican una única ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$.

El álgebra nos asegura que los "nuevos" axiomas son ciertos. Como este nuevo sistema de entes y relaciones "funciona", *tal como lo asegura el álgebra*, entonces nuestro sistema original $\{A_1, A_2, A_3\}$ es compatible.

Otro modelo que podría utilizarse a fin de comprobar que nuestro sistemita es consistente es el siguiente:

-"Punto" → "número natural".

-"Recta" → "conjunto de dos números naturales diferentes".

Podemos aquí hablar de los puntos 1, 2, 5 y 36, por citar algunos, y de las rectas {1, 2}, {7, 9} y {230, 1}, por mencionar algunas. No interesa el orden de los elementos en cada conjunto. La relación primitiva es "pertenecer". Fácilmente se comprueba que los nuevos axiomas, que resultan de cambiar los términos, se verifican plenamente.

Surgirá en alguna mente inquieta esta pregunta: ¿qué nos asegura que la parte de la matemática de donde hemos tomado ese grupo de entes y relaciones (en nuestro caso, el álgebra) es consistente? En efecto, la compatibilidad que hemos demostrado en nuestro ejemplo, se apoya en la del álgebra.

El problema se traslada entonces a comprobar la compatibilidad del álgebra. Luego habrá que remitirse a otra rama de la matemática que sostenga dicha compatibilidad, y así sucesivamente. De estos estudios metamatemáticos se ha derivado el siguiente hecho: esta cadena de "apoyos de consistencia" de las ramas matemáticas, llega finalmente a la aritmética, o bien, a la teoría de conjuntos, disciplinas fundamentales cuyas consistencias no pueden ser demostradas:

> Los casos en que se ha realizado la demostración de la compatibilidad han sido tales, que la compatibilidad de la teoría en cuestión puede reducirse (...) a la de otra; la dificultad se presenta para las disciplinas fundamentales Aritmética y Teoría de Conjuntos. Para la Aritmética el problema se plantea en los siguientes términos: utilizando la Lógica y una parte de los números naturales, probar la compatibilidad de toda la teoría de los números naturales.
>
> Hilbert creyó haber resuelto este problema, pero en realidad no lo consiguió en forma inobjetable.
>
> En 1930 el problema tomó un giro distinto debido a las investigaciones de Kurt Gödel[12]. Este joven matemático vienés encaró y dio solución al problema opuesto, es decir, probó la imposibilidad de una tal demostración. En efecto, Gödel demostró el siguiente teorema: "Es imposible demostrar la falta de contradicción de ninguna teoría formal que abarque la teoría de los números naturales con ninguna especie de medios expresables en los términos de dicha teoría" (Toranzos, 1949: 1634).

12 Kurt Gödel (1906-1978).

La independencia

Considérese el sistema, supuesto “a priori” compatible:

$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_j, ..., A_m\}$. (1)

Cada uno de sus axiomas es *independiente* si no puede ser derivado de los demás. Un axioma deducido de otros es, en realidad, un teorema.

Para probar la independencia de un axioma A_j se aplica un ingenioso recurso: se somete a la prueba de compatibilidad al sistema formado por los demás axiomas y la negación del A_j:

$\{A_1, A_2, A_3, ..., \neg A_j, ..., A_m\}$. (2)

Entonces, si tal consistencia es cierta, resulta que A_j es independiente. Veamos cómo es que funciona esto.

- Si A_j *no* es consecuencia de algunos de sus axiomas compañeros, entonces poner su negación en el conjunto no afectará a este y el sistema (2) podrá seguir funcionando, aunque obviamente emanarán de él teoremas diferentes que los obtenidos del sistema (1).

- Ahora bien, si A_j *es* consecuencia de algunos de sus compañeros, es decir, si es un *teorema* que se deriva de ellos[13], entonces al incluir su negación, esta y los restantes postulados entrarán en flagrante contradicción, saltarán chispas y (2) se volverá incompatible.

Entonces, nuevamente: si se encuentra un modelo o interpretación del sistema axiomático donde valgan todos los axiomas excepto A_j, significará que dicho postulado es independiente del resto. Y lo mismo debería hacerse para cada uno de los axiomas del sistema. El sistema se dirá, así, *absolutamente independiente.*

Existe también una independencia *ordenada* que se da en el caso de que A_2 es independiente del “sistema” $\{A_1\}$, A_3 es independiente del sistema $\{A_1, A_2\}$, ..., A_m es independiente del $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_{m-1}\}$, pudiendo suceder que, invirtiendo el orden de algunos axiomas, la independencia no se mantenga.

¿Ocasiona algún problema que esta condición no se cumpla, o sea, que se incluya algún axioma dependiente? Por tratarse en realidad de un teorema y ser derivación lógica de los “auténticos” postulados, su agregado no produce daño a la compatibilidad del sistema. Lo que se tiene es un “axioma” (que no es tal) sobrante. El sistema puede simplificarse eliminándolo de la lista.

Existen desarrollos en los que los autores introducen con fines didácticos postulados falsos, por el hecho de que un excesivo rigor lógico desorientaría al estudiante.

La independencia es una condición de perfección y elegancia del sistema, y de economía de axiomas. Desde el costado estético de la matemática es más bello un sistema que tiene el menor número posible de postulados.

13 O sea $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_m\} \Rightarrow A_j$, aunque no necesariamente deben intervenir todos los postulados en la prueba de A_j.

Veamos ahora un ejemplo muy escueto de prueba de independencia. Retomemos nuestro también escueto sistema de axiomas:

A_1: existen infinitos puntos y rectas.

A_2: un punto está sobre infinitas rectas.

A_3: dos puntos distintos están contenidos en una única recta.

A_1 considerado solo, es independiente, aunque podría probarse la independencia de cada una de sus partes. Para probar la independencia de A_2 fabricamos un modelo donde sea compatible el sistema $\{A_1, \neg A_2\}$. Para tal fin asumiremos estas interpretaciones de los entes primitivos:

-"Punto" → "número natural".

-"Recta" → "conjunto de dos números naturales distintos mayores que 8".

A_1 se cumple, porque existen infinitos números naturales e infinitos conjuntos de dos números naturales mayores que 8, tales como {9, 10}, {9, 13}, {12, 27}, etc. Sin embargo, no se verifica A_2 puesto que un punto como, digamos, 5, no pertenece a ninguna recta. La negación de A_2 "existe alguna recta sobre la que no hay un punto", es cierta. Todo esto lleva a concluir que A_2 es independiente de A_1.

Para comprobar la independencia de A_3 adoptaremos estas interpretaciones:

-"Punto" → "número natural".

-"Recta" → "conjunto de cuatro números naturales distintos".

Se cumplen con este modelo los axiomas A_1 y A_2, como se puede comprobar fácilmente, pero no se verifica A_3. En efecto, dados dos puntos, por ejemplo, "1" y "2", no hay una única recta que los contiene, sino infinitas: {1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 4, 6}, etcétera.

La saturación o integridad

Supongamos que al sistema $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k\}$ le agregamos un axioma independiente del resto, resultando el nuevo sistema

$\{A_1, A_2, A_3, ..., A_k, A_{k+1}\}$,

que puede ser o no compatible. En el primer caso, el sistema original se dice *no saturado* o *no íntegro*[14]; en el segundo caso, *saturado* o *íntegro.*

14 O también "bifurcable". Este calificativo tiene razón de ser en el hecho de que si A_{k+1} es independiente, entonces puede ser reemplazado por otro axioma, dándose origen así a dos diferentes caminos en esa ciencia deductiva.

Al adosar un axioma a un sistema debe tenerse en cuenta que:

- su campo de validez se limita, en comparación con el que tenía antes del agregado del postulado;

- el nuevo postulado generará en la ciencia nuevos teoremas que de otro modo no aparecerían en ella.

En la geometría euclidiana desarrollada por Hilbert se organizan los axiomas en cinco grupos: axiomas de incidencia, de orden, de congruencia, de paralelismo y de continuidad. Considerando, por ejemplo, el grupo formado por los axiomas de incidencia, orden, congruencia y paralelismo, estamos en presencia de un sistema no saturado, pues admite el agregado de los axiomas de continuidad. El sistema completo constituido por los cinco conjuntos de postulados es, en cambio, saturado. El sistema de axiomas de los *Elementos* es no saturado.

Una forma especial de integridad es la que se denomina "categoricidad". Un sistema de axiomas es *categórico* cuando caracteriza esencialmente un conjunto de objetos, tal que si se tienen dos grupos de entes que los satisfacen, entonces puede establecerse entre ellos una correspondencia biunívoca (isomorfismo), que deja invariantes las propiedades definidas por los axiomas. Tal es el caso de los axiomas de espacio vectorial (véase este cap., pág. 76).

Axiomas fuertes vs. axiomas débiles

Parece oportuno comentar una distinción que suele hacerse entre axiomas "fuertes" y "débiles". Un axioma fuerte postula más cosas que uno débil, que solo enuncia lo justo y necesario, quedando a cargo del matemático demostrar lo demás. Un ejemplo es el axioma de transporte del segmento:

- Versión fuerte: dados un segmento $\overline{MN}$ y una semirrecta de origen O, existe sobre la semirrecta un único punto P tal que $\overline{MN} = \overline{OP}$.

- Versión débil: dados un segmento $\overline{MN}$ y una semirrecta de origen O, existe sobre la semirrecta un punto P tal que $\overline{MN} = \overline{OP}$.

¿Notó la diferencia? En el axioma débil no se afirma que el punto P es único, y esta unicidad debe demostrarse. ¡Interesante!

Axiomática y crisis de los fundamentos

Si bien el método de axiomas se remonta a Aristóteles y Euclides fue el primero en aplicarlo en matemática, y es por ello muy antiguo, los estudios más minuciosos y pormenorizados de los sistemas axiomáticos son modernos.

Desde el siglo XIX los matemáticos atraídos por la lógica y los lógicos interesados por la matemática pusieron bajo la lupa cuestiones tales como "¿qué significa realmente demostrar algo?" o "¿cómo estar seguros de la certeza de una afirmación?". Estos interrogantes y otros relacionados no surgieron de la iluminación repentina de un curioso (o tal vez sí) sino por un serio cuestionamiento a los fundamentos de la matemática.

En el citado siglo se afianzaron las geometrías no euclidianas hiperbólica y elíptica[15] que generaron, además de rechazos, una convulsión en la idea hasta entonces aceptada de la conexión de la geometría con la realidad física.

Además, se vio amenazada la misma coherencia interna de la matemática, al coexistir teoremas contradictorios entre una geometría y otra. Por citar un ejemplo: la suma de los ángulos interiores de un triángulo resultaba:

- igual a dos rectos en la geometría euclidiana,

- menor que dos rectos en la geometría hiperbólica, y

- mayor que dos rectos en la geometría elíptica[16].

También surgió la teoría de conjuntos de Cantor, que planteó desafíos graves a la intuición, tales como los referidos al infinito o ciertas antinomias (falacias de razonamiento, paradojas), como la muy conocida de Russell[17].

> La aparición de las antinomias produjo una verdadera alarma entre los matemáticos y lógicos, pues aunque ellas sólo se refieren a la teoría de las clases, sin embargo, crean la duda respecto a la infalibilidad de la Matemática y de la Lógica. Se origina así un movimiento crítico alrededor de los fundamentos que llegó a amenazar la estabilidad de los cimientos mismos de las dos disciplinas hasta entonces no sospechadas y aceptadas como modelos de perfección. (...) Esto nos explica que el siglo XX encuentre a los matemáticos en plena tarea de reconstrucción de su disciplina (Toranzos, 1943: 172).

El problema de los fundamentos, que aquí no será desarrollado, fue abordado por matemáticos, lógicos y epistemólogos, como Russell (1872-1970), Whitehead (1861-1947), Peano (1858-1932), Hilbert (1862-1943), Gödel (1906-1978), Frege (1848-1925), Brouwer (1881-1966) y Poincaré (1854-1912), con posturas diversas ante el mismo. Algunas de ellas fueron:

- hacer de la matemática una parte de la lógica (racionalismo, logicismo),

- cambiar la lógica (intuicionismo, criticismo),

- axiomatizar la matemática (formalismo)[18].

---

15 La geometría euclidiana también es conocida como "parabólica". Explicamos el porqué de estas denominaciones puestas a las geometrías en cap. 12, pág. 238. Véase Ayres (1971: 133).

16 Véase "El problema de las geometrías" en Hausmann (1968: cap. III).

17 Paradoja: "Aserción inverosímil o absurda, que se presenta con apariencias de verdadera" (DLE). La paradoja de Russell es muy famosa y mucho se ha escrito sobre ella; se refiere a la distinción entre conjuntos "comunes" y conjuntos "que son parte de sí mismos". Una breve y amena exposición véase en Hofstadter (2007: pp. 21-24), libro por demás muy recomendado en relación con el teorema de Gödel y los sistemas formales. También en Toranzos (1943: 171 y ss.).

18 Una buena síntesis sobre el tema puede verse en Toranzos (1943: caps. VI y VII).

La solución al problema de los fundamentos, aportada por Hilbert, aunque no unánimemente aceptada, se mostró como una de las más equilibradas. Cito de nuevo, ahora un poco extensamente, a Toranzos:

> Hilbert cree necesario (...) perfeccionar y ampliar previamente la técnica logicista, en la cual apoya su obra; pero diferenciándose fundamentalmente de sus antecesores, en que no parte de la afirmación de que los conceptos y relaciones matemáticas son reductibles a conceptos y relaciones lógicas; afirma que hay en los fundamentos de la Matemática, elementos nuevos no contenidos en la Lógica, lo cual se traduce en la introducción, al fundamentarla, al lado de los postulados lógicos, de otros nuevos, y esencialmente uno que se refiere al infinito.
>
> Se obtiene así un sistema que resulta una ampliación de la Lógica, es el "sistema formal", que permite fundamentar conjuntamente Lógica y Matemática (...). El propósito de Hilbert es dar a los razonamientos completa objetividad, lo que realiza, imponiendo la condición de que toda proposición que no sea una convención, para formar parte del sistema formal, debe ser, o un axioma o una proposición a la que se llega por una cadena de operaciones del sistema formal a partir de los axiomas; luego, toda proposición del sistema formal es implicada por el sistema de axiomas.
>
> Esta estructuración tan rigurosa, necesitaba un análisis crítico de sus procedimientos, que le permitiera asegurar la perfección del método. Para legislar estas condiciones Hilbert creyó necesario estructurar una disciplina previa que llamó Metamatemática y Metalógica[19], según que se ocupe de cuestiones de estructura de la Matemática o de la Lógica. La Metamatemática utiliza habitualmente el tecnicismo logístico y comprende la teoría de la axiomatización, conjuntamente con la llamada... teoría de la demostración, las cuales se realizan en las siguientes etapas:
>
> 1. Axiomatización de la teoría en cuestión.
>
> 2. Formulación, es decir, traducción del sistema de axiomas al lenguaje simbólico, de manera que los axiomas se transformen en fórmulas aptas para efectuar cálculos logísticos. Estas fórmulas agregadas a las que corresponden a los axiomas lógicos constituyen la base del sistema formal.
>
> 3. Demostración de las condiciones lógicas que debe cumplir un sistema de axiomas: compatibilidad, independencia, integridad y determinación (Toranzos, 1949: 1632)[20].

19 Se denominan *metalógica* y *metamatemática* a los respectivos estudios críticos de las bases de la lógica y la matemática, y entre sus fines está la solución de los problemas que surgen al intentar fundamentarlas.

20 Sobre la condición de determinación no me he detenido; véase Toranzos (1943: 71).

Sobre el formalismo de Hilbert

Hay algunos detalles notables de la postura formalista impulsada por Hilbert la cual, según se dijo más arriba, se presentó como una visión equilibrada ante la cuestión de los fundamentos de la matemática.

En una primera observación, se confirma que la clásica definición de matemática como la "ciencia del número y la cantidad"[21] no armoniza con las modernas concepciones. En efecto, se trata ahora de que la matemática estudia sistemas formales.

> El descubrimiento de la geometría hiperbólica y las reflexiones sobre el problema del espacio, de ellas resultantes, han llevado a los matemáticos a interpretar su disciplina como la Ciencia de los sistemas formales. Puesto que no es posible hacer proposiciones seguras sobre la esencia de los objetos matemáticos, los matemáticos modernos renuncian a toda clase de proposiciones ontológicas. Ya no se intenta (como sucedía en Euclides) definir el punto y la recta, y el mundo de las ideas de Platón ha dejado de ser la hipótesis esencial de sus deducciones (Meschkowski, 1967: 7).

Hilbert en su obra *Fundamentos de geometría* (1899)[22], desarrolla la geometría euclidiana sobre la base de axiomas modernos.

Comparemos las definiciones de Euclides de sus entes primordiales (véase cap. 4, pág. 59), con lo que escribe Hilbert al inicio de su obra:

> Pensemos tres sistemas distintos de cosas: las cosas del primer sistema las llamaremos puntos y las representaremos por A, B, C, ...; las cosas del segundo sistema las llamaremos rectas y las representaremos por a, b, c, ...; las cosas del tercer sistema las llamaremos planos y las representaremos por α, β, γ, ...
>
> Pensemos los puntos, rectas y planos en ciertas relaciones mutuas y designaremos estas relaciones mediante palabras como "estar", "entre", "paralelas", "congruentes", "continuo"; la exacta y total descripción de estas relaciones se consigue mediante los Axiomas de la Geometría (Meschkowski, 1967: 8).

Notamos inmediatamente que ya no se habla de objetos particulares como una recta o un punto, sino de "cosas" que descarnadamente se asocian con un símbolo literal, y que se vinculan a través de "relaciones mutuas" bautizadas con ciertos términos especiales. Los axiomas tienen la misión de describir completamente esos entes y vínculos.

Los objetos de la geometría (y de cualquier rama de la matemática) se convierten en una especie de moldes vacíos que pueden llenarse con diversos significados, con la única obligación de que los axiomas y los teoremas derivados de ellos se verifiquen.

---

21 La definición actual del DLE es: "Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones" (DLE).

22 En alemán *Grundlagen der geometrie.* Lo aclaro porque a veces se citan a secas los *Grundlagen* de Hilbert aludiendo a esta obra.

El criterio de existencia

Cuando los axiomas arbitrariamente colocados no son contradictorios con sus consecuencias, entonces son ellos ciertos, y existen las cosas definidas por los axiomas. Éste es para mí el criterio de verdad y de existencia[23].

Anteriormente, al tratar sobre la compatibilidad de un sistema axiomático, se dijo que esta provoca ni más ni menos que la existencia formal de los objetos definidos implícitamente por los axiomas.

Hacemos ahora una pregunta inofensiva: "¿existe el rectángulo?". Ya que desde niños observamos formas rectangulares (por ejemplo, la del vidrio de una ventana o la de algunas galletitas), la cuestión parece tonta y de respuesta obvia. Ha de tenerse en cuenta, sin embargo, que una forma rectangular no es un rectángulo; más bien ella ayuda a que nos forjemos en la mente primero una noción y, más adelante, un concepto de tal figura geométrica. No hay rectángulos en el mundo real. ¡Oh!, ¿se rompió su ilusión?

Al ser el rectángulo un objeto formal, la pregunta sobre su existencia debería responderse así: "el rectángulo existe si puede ser obtenido a partir del sistema de axiomas". Esto parece un atentado al sentido común porque entre las figuras de nuestra vida cotidiana el rectángulo ocupa un lugar principal. Pero a no preocuparse tanto, que esto resultará muy claro más adelante.

Una opción diferente ante la existencia del susodicho cuadrilátero sería establecerla "por decreto", o sea, considerar al rectángulo como un ente primitivo, lo cual es posible, y esto tendría consecuencias sobre la geometría construida de allí en adelante (también exploraremos esta intrigante posibilidad). Un axioma que establece la existencia de un ente se denomina *postulado de existencia*, como el conocido que afirma "existen infinitos puntos, rectas y planos".

¿Qué respondería usted ahora si alguien le preguntara "¿existen las rectas paralelas?"?

El criterio de verdad

Preguntémonos si es cierto algún enunciado de alguna ciencia del mundo físico, como puede ser la Geografía: "el monte Aconcagua es el más alto de América". Para decidir si esta aseveración es verdadera o no, bastará con obtener el dato preciso. El Aconcagua está allí, en la Cordillera de los Andes, en la realidad, y tal como el hombre de ciencia ha establecido, se trata del monte más alto de América; luego la afirmación es cierta, al menos mientras la tectónica lo permita.

Ahora consideremos un enunciado matemático cualquiera: ¿cómo saber si es verdadero o falso? Si se trata de un axioma, entonces es verdadero porque justamente la condición para tomarlo como axioma es admitir su veracidad (se entiende que no en sentido físico). Por lo tanto citemos algún teorema. Por ejemplo: ¿es cierto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (o 180 grados sexagesimales)?

23 Palabras de Hilbert a Frege (Meschkowski, 1967: 9).

Alguien puede tener un impulso empírico inmediato: tomar unos cuantos triángulos, medir sus ángulos y calcular su suma. ¿Esto tendría que darnos una respuesta? En realidad no, por varios motivos:

a. los verdaderos triángulos tienen lados sin espesor y perfectamente rectilíneos, luego ese alguien no estaría midiendo en triángulos, sino en figuras llenas de imperfecciones;

b. solo estaría aplicando el procedimiento en unos cuantos, pero no en todos los triángulos;

c. por más que las mediciones sean muy precisas, el error inherente a cualquier proceso de mensura afectará la conclusión que pueda obtener[24].

El camino de apelar a una experiencia para certificar una veracidad es impracticable para un enunciado matemático abstracto, no susceptible de ser puesto a prueba en la realidad física[25]. Piénsese si no en la famosa igualdad $e^{\pi i} + 1 = 0$[26].

Desde el punto de vista formalista, la no contradicción de una teoría matemática es el criterio fundamental para su validez. Si de un sistema de axiomas compatible S_1 se deduce un teorema T que afirma que la suma de ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos, entonces T es cierto en el marco de dicho sistema. Si de otro sistema de postulados S_2, distinto de S_1, se deriva que dicha suma es menor que dos rectos, entonces T es falso en la teoría emanada de S_2. Por lo tanto, ante una pregunta de "¿verdadero o falso?" referida a algún enunciado matemático, una respuesta sensata es: "depende del sistema de axiomas que se adopte".

Frege, matemático a quien no le convencía el argumento formalista, en una correspondencia con Hilbert, sostenía lo siguiente:

> Los axiomas los llamo yo teoremas, que son ciertos pero que no necesitan demostración, porque su conocimiento fluye de una fuente distinta de la lógica, que se puede llamar intuición espacial. De la veracidad de los axiomas se deduce, por sí misma, que no son contradictorios. Esto no necesita de ulterior demostración[27].

Nótese que él argumenta invocando una "intuición espacial" que garantiza la veracidad de los axiomas, concepto por demás difuso. Sin duda esta suerte de intuición habría obtenido su contenido de la misma realidad física. Frege, en un contexto de discusión de ideas, sugiere a Hilbert que a través de la no contradicción de un sistema de axiomas como este:

1. *A* es un ser inteligente;

---

24 Esto, como se verá luego, tiene una inesperada consecuencia relacionada con la geometría aplicable al universo físico.

25 El gran Arquímedes descubrió teoremas geométricos a partir de experiencias físicas, pero luego las demostraba rigurosamente al modo euclidiano. Una de sus obras, *El método* (hallada en circunstancias novelescas en un palimpsesto), se refiere a estos "teoremas mecánicos".

26 Esta fórmula, debida al enorme Euler (1707-1783), contiene quizás los cinco números más importantes de la matemática: 1, 0, el número de Euler (e, base de los logaritmos naturales), π y la unidad imaginaria (i). Se obtiene a partir de la fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$, para $x = \pi$.

27 Carta de Frege a Hilbert del año 1900 (Meschkowski, 1967: 9).

2. *A* es omnipresente;

3. *A* es todopoderoso,

podría inferirse la existencia de un ser *A* (Dios, aunque no lo dice explícitamente). Este argumento cae si se comprende la equivocación de Frege:

> (...) en la Matemática, según la concibe Hilbert, no existen proposiciones ontológicas, ni demostraciones de existencia o no existencia de seres superiores. Por consiguiente, tiene sentido concertar que los sistemas de axiomas definen implícitamente "cosas" que deben ser consideradas como "existentes", siempre que el sistema esté libre de contradicciones. "Existen" como objetos de una teoría razonable (Meschkowski, 1967: 11).

Entes primitivos y entes definidos

Desde nuestros primeros contactos con la geometría nos vienen diciendo que los entes primitivos son el punto, la recta y el plano. ¿Son los únicos posibles? La respuesta es *no*. Si bien es preferible que los entes primordiales sean los más simples, esto no obliga a optar siempre por puntos, rectas y planos.

Podemos aquí citar a los matemáticos Pasch, Schur y Peano[28]. Ellos, creyendo más intuitivas las propiedades de los objetos finitos antes que las de los infinitos, adoptaron como entes primitivos el punto, el segmento y la región plana finita (convexa). A partir de estos objetos y con los axiomas pertinentes llegaron a definir recta y plano. Esto se verá con más detalle en el capítulo siguiente.

Con un mayor nivel de generalidad en la selección de los entes primarios, tenemos los ejemplos de Veblen, que construyó la geometría sobre punto y la relación de orden, y de Levi, quien lo hizo sobre punto y distancia[29].

En cuanto a Euclides, ¿qué entes primitivos adoptó? Mirando los postulados y las definiciones primeras, podemos suponer que tomó el punto, la línea recta y el plano, aunque la circunferencia también se menciona en el Postulado III, por lo que podría considerarse como primitiva. La situación es un poco extraña, ya que en la Definición 15 se define el círculo como "región comprendida por una sola línea, etc., etc.", pudiendo haberse mencionado allí la circunferencia.

En síntesis, un objeto matemático es primitivo o definido según el ordenamiento que se le dé a la teoría, y cualquier ente debe caber en una de estas dos posibilidades.

28 Moritz Pasch (véase la nota 9 de este cap.), Giuseppe Peano (véase este cap., pág. 89), Issai Schur (1875-1941) (Amaldi, 1921: 78).

29 Oswald Veblen (1880-1960), Beppo Levi (1875-1961). (Toranzos, 1943: 132).

[Capítulo 6]

La geometría euclidiana de Hilbert

> Es un instante solemne aquel en que entran en contacto dos campos de la matemática (Brunschwicg, en Colerus, 1973: 181).

> Era forzoso que –después de todo lo que había sucedido en el siglo XIX en el campo de la matemática, de la física y de la filosofía– surgiese en la mente y en el ánimo de más de uno el deseo de ordenar este enorme caos de descubrimientos y generalizaciones (Colerus, 1973: 185).

Así como en el capítulo 4 se mostró escuetamente cómo trabaja la geometría de *Elementos*, en este se hará un acercamiento al desarrollo de Hilbert expuesto en *Grundlagen*, donde se reeditó la geometría euclidiana a partir de axiomas modernos y con una distinta organización.

Una de las virtudes de la obra de Hilbert es que subsanó falencias presentes en *Elementos* tales como la insuficiente cantidad de axiomas, la inutilidad de las definiciones primeras, algunas demostraciones y definiciones imperfectas y varios axiomas implícitos (Toranzos, 1943: 132; Hilbert, 1902).

Entes y relaciones fundamentales, y grupos de axiomas

> Cada uno de estos grupos expresa, por sí mismo, ciertos hechos relacionados fundamentales de nuestra intuición (Hilbert, 1902: 3).

Ya se mostró la manera en que Hilbert introduce sus entes primitivos punto, recta y plano (véase cap. 5, pág. 91). Junto a estos objetos básicos se consideran cinco relaciones primitivas: 1) pertenecer, 2) estar entre, 3) ser congruente con, 4) ser paralelo a, 5) ser continuo. Para cada una de estas relaciones Hilbert estableció un grupo de postulados destinados a caracterizarlas. En concreto, enunció siete axiomas de *incidencia* (o *vinculación*, o *conexión*, o *enlace*), cinco de *orden*, cinco de *congruencia*, uno de *paralelismo* y dos de *continuidad*[1].

Si a los entes y relaciones primitivos se les asigna un contenido determinado, quedará conformado un modelo de la geometría. Si ese contenido es el intuitivo habitual, la geometría queda ligada a otras ciencias y saberes instrumentales, y resulta funcional a nuestros fines prácticos.

1 En otros textos varía la cantidad: 8 de incidencia, 4 de orden, 6 de congruencia.

Los axiomas de incidencia

Los siguientes postulados conjuntamente caracterizan la relación *incidencia.* La tabla siguiente los expone junto con el objetivo que cumple cada axioma.

Axiomas de INCIDENCIA		
Axioma	Enunciado	Finalidad
I_1	Dos puntos distintos determinan completamente una recta.	Caracterizar la incidencia entre puntos y rectas.
I_2	Dos puntos cualesquiera distintos de una recta, determinan completamente esa recta.	
I_3	Tres puntos no situados en la misma recta determinan completamente un plano.	Caracterizar la incidencia entre puntos y planos.
I_4	Tres puntos cualesquiera de un plano que no están en una misma recta, determinan completamente ese plano.	
I_5	Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los puntos de la recta están en el plano.	Caracterizar la incidencia entre rectas y planos.
I_6	Si dos planos tienen un punto en común, tienen por lo menos otro punto en común.	Caracterizar la incidencia entre planos.
I_7	En cada recta hay al menos dos puntos, en cada plano hay al menos tres puntos que no están en una misma recta, en el espacio hay al menos cuatro puntos que no están en un mismo plano.	Establecer en tres las dimensiones del espacio.

Hilbert denomina axiomas planos a I_1 e I_2, y espaciales a los demás del grupo de incidencia. Hay varias expresiones para indicar la vinculación: "pertenece", "pasa por", "está en", "contiene a", etc.

Nótese que los axiomas I_1 e I_2, tan similares, difieren en que en I_1 afirma que dos puntos cualesquiera bastan para determinar una recta, mientras que I_2 dice que una recta queda determinada por dos cualesquiera de sus puntos. Algo análogo puede observarse de I_3 e I_4.

A partir de este grupo se demuestran teoremas como los siguientes (no incluyo las pruebas de todos):

- Dos rectas de un plano tienen un único punto en común o ninguno.

Demostración: dos rectas se cortan o no se cortan (por principio del tercero excluido[2]). Si no se cortan el teorema está demostrado. Si lo hacen en un punto *P*, no pueden hacerlo en otro punto *Q* pues entonces la recta *PQ* no sería la única por *P* y *Q*, tal como lo fija I_2.

- Dos planos no tienen un punto en común o tienen un recta en común.

- Un plano y una recta que no está en él tienen un único punto en común o ninguno.

2 En lógica proposicional este principio es $P \vee \neg P$, y siempre es verdadero (tautología).

- Por una recta y un punto que no está en ella, o por dos rectas que tienen un punto en común, pasa un único plano.

Demostración: en la recta hay al menos dos puntos (I_7). Ellos y el exterior mencionado en la hipótesis determinan un único plano (I_3, I_4).

Los axiomas de orden

> Un estudio del orden... se ha convertido en una necesidad esencial para comprender las bases de la matemática (Bertrand Russell, citado en Coxeter, 1971: 209).

Recuerde el lector una notación mencionada en la nota 10 del cap. 5: el símbolo *A*-*B*-*C* indica que *B* está (o yace) entre *A* y *C*, y que *A*, *B* y *C*, están sobre una misma recta.

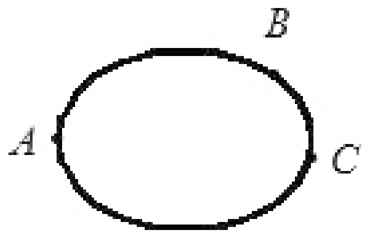
Los axiomas de orden definen implícitamente la relación "entre" y posibilitan ordenar los puntos de la recta, del plano y del espacio.

Axiomas de ORDEN		
Axioma	Enunciado	Finalidad
O_1	Si *A*, *B* y *C*, son tres puntos de una recta y *A*-*B*-*C*, también *C*-*B*-*A*.	Caracterizar el orden en la recta (orden lineal).
O_2	Si *A* y *C* son dos puntos de una recta, hay en ella por lo menos un punto *B* tal que *A*-*B*-*C* y al menos un punto *D* tal que *A*-*C*-*D*.	
O_3	De tres puntos de una recta hay uno y solo uno que está situado entre los otros dos.	
O_4	Cuatro puntos cualesquiera *A*, *B*, *C*, *D*, de una recta pueden disponerse de manera que *A*-*B*-*C* y *A*-*B*-*D*, y además *A*-*C*-*D* y *B*-*C*-*D*.	
O_5	Si *A*, *B* y *C*, son tres puntos que no están en la misma recta, y *a* es una recta del plano determinado por *A*, *B* y *C*, que no contiene a ninguno de ellos, entonces si *a* contiene un punto del $\overline{AB}$, contiene también un punto del $\overline{BC}$ o del $\overline{AC}$[a]	Caracterizar el orden en el plano.

En los axiomas de orden de O_1 a O_4 se establece cómo se ordenan los puntos en una recta. Es interesante ver que O_3 no permite que la recta pueda ser cerrada. En efecto, si fuese así, entonces dados tres puntos cada uno de ellos estaría entre los otros dos y el axioma resultaría violentado (Fig. 29). En efecto, en la línea cerrada se tiene que *A*-*B*-*C*, *B*-*C*-*A* y *C*-*A*-*B*. Dicha línea no puede denominarse "recta" en esta geometría.

---

a O_5 es denominado "axioma de Pasch". Véase cap. 5, pág. 80.



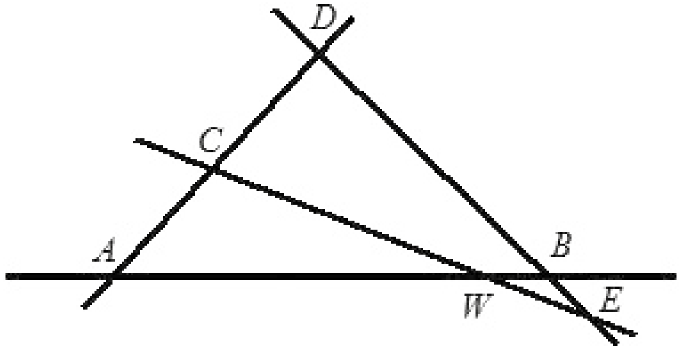
(Fig. 29)

Luego de enunciar O_3 Hilbert define segmento $\overline{AB}$ de manera llamativa, ya que se lo caracteriza como "el sistema de puntos *A* y *B*". Los puntos de la recta *AB* situados entre ellos son los *interiores* al $\overline{AB}$.

Los postulados de incidencia y orden son llamados en conjunto "axiomas gráficos". Veamos unas consecuencias que surgen de ellos.

Teorema: Entre dos puntos de una recta existen infinitos puntos.

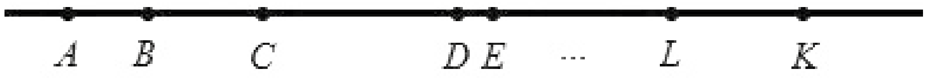
Demostración: sean *A* y *B* sobre una recta (Fig. 30).



(Fig. 30)

Demostración: Por I_7 existe *C* fuera de *AB*. Por I_1 *A* y *C* determinan la recta *AC*. Por O_2 existe *D* tal que *A-C-D* (*D* no puede coincidir con *B* pues en ese caso *C* estaría en *AB* y no sería exterior a ella). Por I_1 *B* y *D* determinan *BD*. Por O_2 existe *E* tal que *D-B-E*. Por I_1 *E* y *C* determinan *EC*, que corta a $\overline{AD}$ en *C* pues *A-C-D*, y no corta a $\overline{DB}$ pues *D-B-E* y *E* es exterior a ese segmento. Entonces, por O_5, *EC* debe cortar a $\overline{AB}$ en un punto *W* tal que *A-W-B*. El razonamiento puede repetirse partiendo de los puntos *A* y *W* (o *W* y *E*), obteniéndose siempre un punto interior al segmento que determinan, y así indefinidamente, lo que demuestra el teorema.

Teorema del orden lineal (sin demostración): sea un número finito de puntos de una recta (Fig. 31). Ellos pueden ponerse en una secuencia *A, B, C, ..., L, K,* de modo que *B* esté entre *A* y los demás puntos *C, ..., L, K; C* esté entre *A, B* por un lado y *D, ..., L, K,* por el otro; *D* esté entre *A, B, C* por un lado y *E, ..., L, K,* por el otro; etc. (El enunciado continúa considerando luego el orden inverso de los puntos: *K, L, ..., C, B, A*). (Hilbert, 1902: 7).



(Fig. 31)

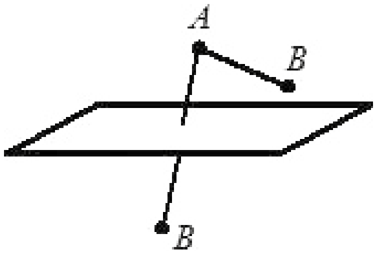
Este teorema aparece como axioma en algunos desarrollos, por ejemplo el de Enriques[3], que fue adoptado y adaptado para la enseñanza de la geometría en Argentina en la primera mitad del siglo XX.

Teorema del orden plano: toda recta de un plano divide los puntos del plano no pertenecientes a ella en dos regiones, de manera que dados dos puntos A y B del plano se verifica que: 1) si A y B pertenecen a la misma región, $\overline{AB}$ no corta a la recta, 2) si A y B pertenecen a distintas regiones, $\overline{AB}$ corta a la recta. (Hilbert, 1902: 8).

Demostración: véase cap. 5, pág. 81.

El enunciado coincide con el del tradicional axioma de la división del plano. Esto muestra, nuevamente, cómo una misma afirmación puede aparecer como postulado o como teorema.

Teorema del orden espacial: (Fig. 32) todo plano divide los puntos del espacio en dos regiones... etc. (Hilbert, 1902: 10). Adaptando los términos, es análogo al teorema anterior. Puede notarse que el orden en el espacio no surge directamente de los axiomas, sino que se demuestra.



(Fig. 32)

A partir de ahora pueden definirse semirrecta, semiplano, poligonal y polígono, sin que aquí necesitemos entrar en detalles.

Los axiomas de orden son fundamentales en la geometría porque a partir de ellos se originan las nociones de *signo* y *sentido*. Debe notarse lo importante que son estos conceptos: sin ellos no es posible tratar números negativos, coordenadas, vectores, ángulos orientados, funciones, etc. Euclides no se ocupó de estos postulados por no estar en su pensamiento la idea de que era menester axiomatizar el orden, algo muy sutil para la matemática de su momento. De hecho, el interés por este asunto es moderno, al intuir los matemáticos su necesidad.

3 Federigo Enriques (1871-1946) fue un matemático italiano que trabajó en el campo de la geometría.

El mismo Euclides no hace uso explícitamente del orden cuando no se relaciona con la medida, al decir que una magnitud puede ser mayor o menor que otra. Fue Pasch, en 1822, el primero en señalar que la geometría del orden se podría desarrollar sin hacer referencia a la medida (Coxeter, 1971: 208).

Hay teoremas y fórmulas que, de no considerar signos o sentidos, exigen para su obtención o análisis el estudio de casos particulares que hacen más engorrosos los tratamientos.

Los axiomas de congruencia

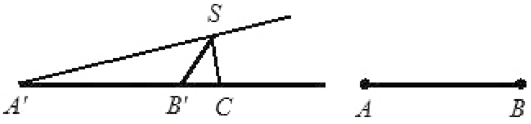
Estos axiomas se ocupan de caracterizar la congruencia de segmentos, que es la más elemental, y la de ángulos. Luego se puede abordar la congruencia de figuras planas.

<table>
<tr><td colspan="3">Axiomas de CONGRUENCIA</td></tr>
<tr><td>Axioma</td><td>Enunciado</td><td>Finalidad</td></tr>
<tr><td>C_1</td><td>Si A y B están en una recta a y si A’ es un punto sobre la misma u otra recta a’, entonces, a un lado determinado de A’ sobre a’ [b] existe un único punto B’ tal que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Todo segmento es congruente con él mismo.</td><td rowspan="3">Caracterizar la congruencia de segmentos.</td></tr>
<tr><td>C_2</td><td>Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ y $\overline{AB} = \overline{A''B''}$, entonces $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$.</td></tr>
<tr><td>C_3</td><td>Si $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son dos segmentos de a, sin otro punto común que B, $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ son dos segmentos en análoga situación y además $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'}$, resulta $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.</td></tr>
<tr><td>C_4</td><td>Sean el ángulo ∠(h, k) [c] en un plano α, una recta α’ en un plano a’ y h’ una semirrecta de a’ con origen O’. Entonces hay en cada uno de los semiplanos que a’ determina, una única semirrecta k’ de origen O’ tal que ∠(h, k) = ∠(h’, k’) y que los puntos interiores de ∠(h’, k’) estén en dicho semiplano. Todo ángulo es congruente con él mismo.</td><td rowspan="2">Caracterizar la congruencia de ángulos.</td></tr>
<tr><td>C_5</td><td>Si ∠(h, k) = ∠(h’, k’) y ∠(h, k) = ∠(h”, k”), entonces ∠(h’, k’) = ∠(h”, k”).</td></tr>
<tr><td>C_6</td><td>Si en dos triángulos ABC, A’B’C’ se tiene que $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'}$, y que ∠BAC = ∠B’A’C’, entonces ∠ABC = ∠A’B’C’ y ∠ACB = ∠A’C’B’.</td><td>Conectar las congruencias de segmentos y ángulos.</td></tr>
</table>

C_1 es el axioma del transporte del segmento. Este axioma es fuerte (véase cap. 5, pág. 88), porque se afirma en él la unicidad de *B’*. Resulta interesante que esta unicidad podría omitirse en el postulado (y así debilitarlo) y ser demostrada como sigue (Fig. 33).

b O sea en cada semirrecta de origen *A’*.

c En esta notación *h* y *k* son las semirrectas que constituyen los lados del ángulo. Hilbert define al ángulo simplemente como el par de semirrectas *h* y *k* de origen común. Ellas dividen al plano en dos regiones, una convexa (el interior del ángulo) y otra cóncava. En este esquema no hay lugar para los ángulos cóncavos.



(Fig. 33)

Demostración: sean $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ como en el axioma C_1. Suponemos que existe otro punto *C*, distinto de *B'*, tal que $\overline{AB} = \overline{A'C}$. Luego $\overline{A'B'} = \overline{A'C}$ por C_2. Se traza ahora la semirrecta *A'S* y se une *S* con *B'* y con *C*. En los triángulos *A'SB'* y *A'SC*, aplicando C_6 resulta que $\angle A'SB' = \angle A'SC$, pero esto contradice C_4 puesto que a un mismo lado de *A'S* hay *dos* semirrectas de origen *S* que determinan con *A'S* ángulos congruentes. Esto demuestra que *B'* debe coincidir con *C*, es decir, *B'* es único.

C_1 y C_2 permiten demostrar, para la congruencia de segmentos, los caracteres reflexivo, simétrico y transitivo. C_3 hace posible definir la adición de segmentos.

C_4 sienta la base de la congruencia de ángulos[4], siendo innecesarios postulados análogos a C_2 y C_3 para definir la adición de ángulos.

Otras consecuencias de los postulados de este grupo son:

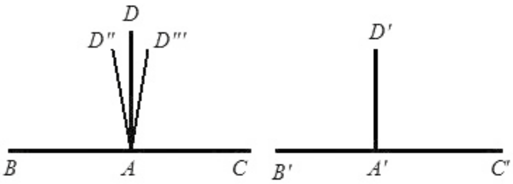
a) las definiciones de ángulos suplementarios, ángulo recto (que es el congruente con su suplementario), ángulos opuestos por el vértice (también llamados *verticales*) y triángulos congruentes;

b) los teoremas de congruencia de triángulos (nuestros conocidos "criterios").

En general, dos figuras son congruentes si puede establecerse entre sus puntos una correspondencia biunívoca, tal que segmentos con extremos en pares de puntos homólogos y ángulos que tengan por lados semirrectas homólogas[5] son también congruentes.

Veamos el teorema con el que Hilbert demuestra que *todos los ángulos rectos son congruentes*, enunciado que en Euclides es un postulado[6].

Demostración: (Fig. 34) sean



(Fig. 34)

4 Para la congruencia de ángulos se usa el símbolo "≅; si se emplea "=" se está indicando igualdad de amplitudes de los ángulos. Por simplicidad usaremos el último símbolo.

5 La homología es, en geometría, "relación de los lados que en cada una de dos o más figuras geométricas semejantes están colocados en el mismo orden" (DLE). A partir de los términos griegos *homo* (igual) y *logos* (palabra), son homólogos los objetos que "se nombran igualmente", en muchas demostraciones, por ejemplo, puntos *A* y *A'*, o segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ aunque todos sabemos que esto no es esencial sino accesorio en una prueba.

6 Teorema 15 en (Hilbert, 1902: 20). El postulado de Euclides es el IV (véase cap. 4, pág. 62).

$\angle BAD = \angle CAD$ (1)

suplementarios y congruentes y, en igual condición,

$\angle B'A'D' = \angle C'A'D'$ (2).

Los cuatro ángulos por hipótesis son rectos.

Si bien por (1) y (2) cada ángulo es congruente con su suplementario, no sabemos si $\angle BAD = \angle B'A'D'$, por ejemplo. Entonces, admitimos que son incongruentes e intentamos obtener algún absurdo por esta vía.

Suponemos que:

$\angle B'A'D' = \angle BAD''$ (3).

De (2) y (3), aplicando el axioma C_5, se tiene

$\angle C'A'D' = \angle BAD''$ (4).

Por tener suplementos iguales resulta

$\angle CAD'' = \angle C'A'D'$ (5).

De (4) y (5) se deduce

$\angle CAD'' = \angle BAD''$ (6).

Dado que $\angle BAD = \angle CAD$, es posible[7] trazar en $\angle CAD$ una semirrecta interior $\overrightarrow{AD'''}$ tal que

$\angle BAD'' = \angle CAD'''$ (7).

Finalmente (6) y (7) nos llevan a que $\angle CAD'' = \angle CAD'''$, lo que es absurdo por contradecir C_4. Luego (3) es falsa y el teorema queda demostrado.

7 Se demuestra en Teorema 13 (Hilbert, 1902: 19).

El axioma de paralelismo

> La introducción de este axioma simplifica grandemente los principios fundamentales de la geometría y facilita en no poco grado su desarrollo (Hilbert, 1902: 11).

Con la adopción de este axioma es posible desarrollar las teorías del paralelismo y la semejanza, la homotecia[8], el estudio de las figuras circulares y el teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo. Hilbert en su obra antepone este axioma a los de congruencia. Se trata del conocido axioma de Euclides, en una de sus versiones equivalentes.

Axioma de PARALELISMO		
Axioma	Enunciado	Finalidad
P	Por un punto exterior a una recta *a* existe, en el plano determinado por la recta y el punto, una única recta que no corta a *a*.	Caracterizar el paralelismo de rectas.

La tal recta que no corta a *a* es la que llamamos *paralela* a *a*. El enunciado contiene dos aserciones:

a) que siempre existe una recta que no es secante con *a*, y

b) que dicha recta paralela es la única posible.

Un teorema inmediato es el siguiente: si dos rectas *a, b,* de un plano no encuentran a una tercera recta *c* del mismo plano, entonces no se encuentran entre sí (Hilbert, 1902: 11).

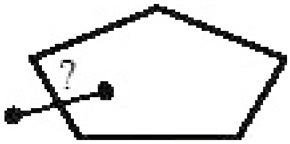
Demostración: si *a* y *b* tuvieran en común un punto *A*, habría en el plano dos rectas por *A* que no encuentran a *c*, y esto contradice el axioma P.

La inclusión del postulado de paralelismo imprime a la geometría euclidiana un conjunto de peculiaridades que resultarán patentes cuando se la compare con otras geometrías, y que pasan inadvertidas a la mayoría de las personas.

Los axiomas de continuidad

La característica de continuidad de la recta, del plano y del espacio, se establece a través de axiomas, pues no alcanzan para esto los considerados hasta aquí. Se demuestra con ellos que entre dos puntos de una recta siempre hay otro, pero no se asegura que esos puntos "llenen" toda la recta. Tampoco se puede establecer que un segmento con un extremo en el interior de un polígono y otro en el exterior, corte a su contorno (Fig. 35). Intuitivamente la continuidad significa que en el espacio geométrico euclidiano no hay "agujeros".

8 Dado un punto *O* y un número real *k* se llama "homotecia de centro *O* y razón *k*" a la transformación del plano que hace corresponder a un punto $P \neq O$ un punto *P'* en la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overline{OP'}/\overline{OP} = k$.



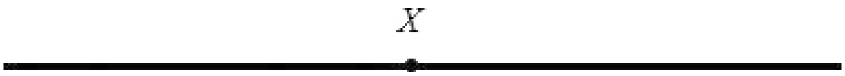
(Fig. 35)

Axiomas de CONTINUIDAD		
Axioma	Enunciado	Finalidad
Co_1	Si A_1 es un punto del segmento arbitrario $\overline{AB}$, y los puntos A_2, A_3, A_4, ..., son tales que A-A_1-A_2, A_1-A_2-A_3, A_2-A_3-A_4, etc., y además $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots$, entonces en la serie de puntos A_1, A_2, A_3, ... existe un A_n tal que A-B-A_n.	Establecer la correspondencia entre puntos de la recta y números reales.
Co_2	Los elementos de la geometría forman un sistema no susceptible de ser ampliado si se quiere conservar la validez de los axiomas precedentes.	Establecer la correspondencia entre números reales y puntos de la recta.

El axioma de Arquímedes

Co_1 es conocido como axioma de Arquímedes o de Eudoxo-Arquímedes[9]. Existe una versión menos puntillosa: "dados dos segmentos desiguales, existe un múltiplo del menor que supera al mayor". Veremos cómo con este postulado puede establecerse la correspondencia fundamental entre puntos de la recta y los números reales a que nos tiene acostumbrados la geometría analítica.

Pensemos inicialmente en una recta cualquiera con un punto cualquiera sobre ella, que llamaremos X (Fig. 36). ¿Cómo hacer para asignarle a X un número real?

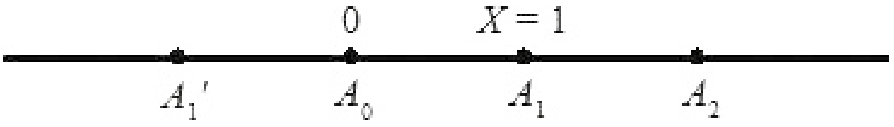


(Fig. 36)

Coloquemos sobre la recta una sucesión de puntos A_i: A_0, A_1, A_2, ..., que determinen segmentos congruentes como indica el postulado. Al punto A_0 le hacemos corresponder el número real 0.

Caso 1. Si justamente uno de los puntos A_i coincide con X le asignamos a este el número real i. Por ejemplo, en la Fig. 37 tenemos $X \to 1$, donde "$\to$" indica la asignación.

9 Véase la nota 24 del cap. 1.



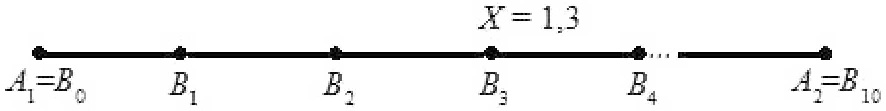
(Fig. 37) Al punto X se le asigna el número real 1.

Tomando puntos simétricos de los A_i respecto de A_0, que simbolizaremos A_1', A_2', etc., podremos asignar números enteros negativos a los mismos; es decir que si X coincidiera con A_1', entonces $X \rightarrow -1$.

Caso 2. Si no se da el caso 1 significa que X quedó entre dos puntos A_i y A_{i+1}. Supongamos que esto sea entre A_1 y A_2 (Fig. 38):

(Fig. 38)

Ahora dividimos el segmento $\overline{A_1A_2}$ en diez partes alícuotas[10] con puntos B_j: B_0, B_1, B_2, ..., B_{10}, haciendo coincidir B_0 con A_1 y B_{10} con A_2. Si X cae ahora sobre alguno de los $\underline{B_j}$ le asignamos a X el número *i,j* (un decimal exacto). Vamos a hacer una ampliación del segmento $\overline{A_1A_2}$ para ver mejor, suponiendo que X está sobre B_3. Resulta así $X \rightarrow 1{,}3$ (Fig. 39).



(Fig. 39) Al punto X le asignamos el número 1,3.

Resulta interesante considerar que se dividió $\overline{A_1A_2}$ en *diez* partes porque estamos adoptando la base numérica 10. Podríamos trabajar en otras bases, digamos, en base 5, dividiendo $\overline{A_1A_2}$ en cinco alícuotas, con puntos B_0, B_1, B_2, ..., B_5. Obsérvese que X no puede coincidir con el extremo derecho del segmento porque de ser así no tendría sentido haberlo dividido en alícuotas.

Supongamos que X *no* hubiera coincidido con ninguno de los B_j, y que estuviera situado entre B_3 y B_4. Entonces ahora dividimos $\overline{B_3B_4}$ en diez alícuotas mediante puntos C_k: $C_0 = B_3$, C_1, ..., $C_{10} = B_4$, y si X coincide con un C_k resulta $X \rightarrow$ *i,jk*. Digamos que si $X = C_6$ entonces $X \rightarrow 1{,}36$.

El procedimiento descripto puede continuarse, y si en algún paso X cae sobre un punto de división, le asignamos un número decimal exacto.

10 Esto puede hacerse a partir de los postulados de congruencia y paralelismo, mediante la conocida construcción euclidiana de división de un segmento en partes congruentes.

Caso 3. Puede suceder que en las sucesivas subdivisiones vistas en el caso 2, el punto X quede *siempre* entre dos puntos con subíndices h, $h + 1$; por ejemplo, si X cae entre B_3 y B_4, luego entre C_3 y C_4, luego entre D_3 y D_4, y así indefinidamente. En esta situación a X le asignamos un número decimal periódico. Por lo dicho sería $X \to 1{,}333...$

Pueden fácilmente razonarse las distintas variantes que harían corresponder a X otros decimales periódicos (puros o mixtos) tales como 1,3444... o 1,324324...

Caso 4. Finalmente, si en la mecánica de las divisiones y subdivisiones, X no coincidiera *jamás* con alguno de los puntos divisores[11], ni se diera el Caso 3, estaríamos en condiciones de asignar a X el número con la mantisa infinita no periódica que correspondiera, es decir un número *irracional.*

Veamos un ejemplo:

Paso	X está entre	Número asignado en el paso
1	A_1 y A_2	$X \to 1$
2	B_4 y B_5	$X \to 1{,}4$
3	C_1 y C_2	$X \to 1{,}41$
4	D_4 y D_5	$X \to 1{,}414$
5	E_2 y E_3	$X \to 1{,}4142$
...	...	...

De esta cadena que podemos suponer infinita de pasos resultaría $X \to \sqrt{2}$. La fundamentación se basa en la consideración de las dos sucesiones monótonas de números racionales siguientes:

$1 < 1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < \ldots\ m_s \ldots < \ldots$

$2 > 1{,}5 > 1{,}42 > 1{,}415 > 1{,}4143 > \ldots\ n_s \ldots < \ldots$

que cumplen que, dado un número positivo arbitrariamente pequeño ε, existen siempre unos términos m_s y n_s, tales que su diferencia, en valor absoluto, es menor que ε.

Puede decirse que ambas sucesiones definen al número irracional $\sqrt{2}$, como el límite al que ellas tienden.

¿Qué papel juega aquí el axioma de Arquímedes? Volvamos a mirar la Fig. 38. El axioma nos garantiza que hay siempre un múltiplo de $\overline{A_0A_1}$ que supera a $\overline{A_0X}$. También, en la división del $\overline{A_1A_2}$ (Fig. 39), que hay un múltiplo de $\overline{B_0B_1}$ mayor que $\overline{B_0X}$. En general, asegura la existencia de un múltiplo de la parte alícuota que supera al segmento determinado por el extremo izquierdo y el punto X[12].

11 Obviamente que esto es impracticable, pero teóricamente es comprensible e inobjetable.

12 Existen geometrías no *arquimedianas;* en ellas no se cumple el axioma de Arquímedes.

El axioma de completitud

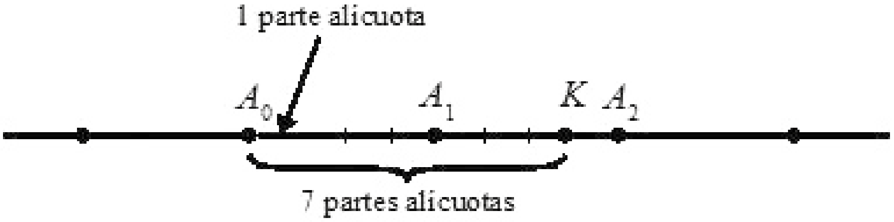
Ahora nos enfrentamos al problema inverso: dado un número real cualquiera, establecer un procedimiento para asignarle un punto de la recta.

Sobre una recta consideremos como antes los puntos A_i: A_0, A_1, A_2, ..., y los segmentos $\overline{A_0A_1} = \overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots$

Caso 1. A 0 le asignamos A_0. A un número entero i le hacemos corresponder el punto A_i si es positivo, o el simétrico de A_i respecto de A_0 (A_i') si es negativo. Vemos en la Fig. 40: $0 \rightarrow A_0$, $2 \rightarrow A_2$ y $-3 \rightarrow A_3$'.

(Fig. 40)

Caso 2. Para un número racional positivo no entero que sea expresable como una fracción $^m/_n$, bastará con dividir cualquier segmento $\overline{A_iA_{i+1}}$ en n alícuotas y luego tomar sobre la recta, a partir de A_0, m segmentos consecutivos congruentes con la alícuota. El extremo del último segmento será el punto asignado a $^m/_n$. Por ejemplo a $^7/_4$ le asignamos el punto K de la Fig. 41.



(Fig. 41)

Si la fracción es negativa, por ejemplo $^{-7}/_4$, se le asigna el simétrico de K respecto de A_0.

Caso 3. Nos resta ver cómo hacemos corresponder puntos a números irracionales como, por ejemplo, $\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$

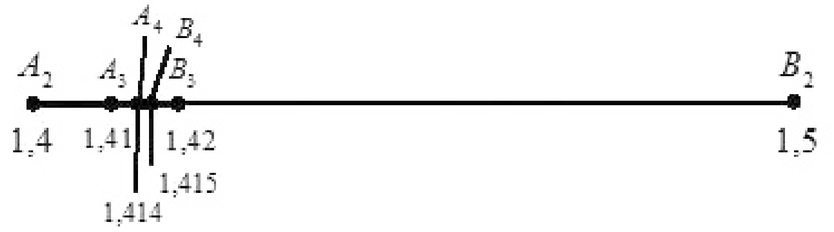
Es posible formar dos conjuntos de números *racionales* que se vayan aproximando, por defecto y por exceso, a $\sqrt{2}$:

L = {1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...},

L' = {2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; ...}.

Todos estos números se pueden poner en correspondencia con puntos de la recta, tal como se hizo en los casos 1 y 2. Aquí vemos algunos (Fig. 42)[13]:

13 A_1 y B_1, no visibles, son los correspondientes de los números 1 y 2.



(Fig. 42)

Podemos asociar los conjuntos de números racionales L y L' con sendos conjuntos de puntos

$K = \{A_1, A_2, A_3, A_4, ...\}$,

$K' = \{B_1, B_2, B_3, B_4, ...\}$.

Ahora introducimos la noción de *cortadura*[14]. Para definir una necesitamos:

1. un conjunto C donde esté establecida una relación de orden R,

2. dos subconjuntos de C no vacíos: C_1 y C_2,

3. la condición de que para todo x de C_1, xRy con todo elemento y de C_2.

La condición 3 puede también enunciarse de manera alternativa, así:

3'. todo elemento de C_1 *preceda* o *siga* (según R) a todo elemento de C_2.

Para el caso de L y L' se observa que tomando:

$C = Q$, $C_1 = L$, $C_2 = L'$, $R =$ "<",

se establece una cortadura en el conjunto Q dado que se cumplen las tres condiciones anotadas. La cortadura se denota (L, L').

Análogamente para los conjuntos K y K', con $C = \{$puntos de la recta$\}$, $C_1 = K$, $C_2 = K'$, $R =$ orden lineal[15],

se constituye una cortadura (K, K') en el conjunto de puntos de la recta.

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass[16], según el cual todo conjunto infinito y acotado de números reales posee *punto de acumulación* (o *punto límite*), resulta que L y L' tienen un punto de acumulación

14 Sobre las cortaduras hay varias definiciones. En algunos casos se habla de un único conjunto que establece la cortadura y, en otros casos, dos. En particular, si se trata de cortaduras en el conjunto Q (números racionales), se las denomina "de Dedekind". Hay también una clasificación de las cortaduras en *corte, laguna* y *salto,* pero se sale de mi objetivo detallar estos tipos de cortadura.

15 Es decir, la relación de orden lineal establecida a partir de los axiomas de orden.

16 Bernard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897).

común que separa ambos conjuntos. Diremos que dicho punto es el *elemento de separación* de la cortadura (*L*, *L'*) y, para el caso analizado, se trata del irracional $\sqrt{2}$.

De manera muy parecida, aplicamos el axioma de Dedekind[17] que establece que toda cortadura en la recta admite un punto de separación, es decir, uno que deja a todos los de *K* por un lado y a los de *K'* por otro. Este elemento de separación es único (esto se demuestra) y puede pertenecer a *K* o *K'*, o a ninguno de ellos.

Por lo tanto, el elemento de separación de (*L*, *L'*) se corresponde con el de (*K*, *K'*), que es un punto *de la recta*[18]. En este lugar interviene el axioma de completitud Co_2, pues si no estuviera sobre la recta, resultaría que el sistema de puntos de la recta sería ampliable, y eso contradiría dicho axioma (Toranzos, 1943: 147). En palabras de Hilbert,

> (...) este axioma no nos dice nada concerniente a la existencia de puntos límite o a la idea de convergencia. Sin embargo, nos permite demostrar el teorema de Bolzano [Bolzano-Weierstrass], en virtud del cual, para todos los conjuntos de puntos de una recta situados entre dos puntos definidos, existe necesariamente un punto de acumulación, es decir, un punto límite. Desde un punto de vista teórico, el valor de este axioma es que conduce indirectamente a la introducción de los puntos límite y, por lo tanto, hace posible establecer una correspondencia uno-a-uno entre los puntos de un segmento y el sistema de los números reales. En lo que sigue, no se hará más uso del axioma de completitud (Hilbert, 1902: 25).

En resumen, los postulados de continuidad, juntos, permiten establecer la tan fundamental correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de la recta. Es de esperar que el lector, en especial si es estudioso de la matemática, valore que su cotidiana recta numérica, utilizada tantas veces, por ejemplo, al confeccionar gráficos cartesianos, requiere de un importante y profundo fundamento teórico. Y así acontece con tantos otros contenidos usuales.

Otros enfoques

La riqueza de la matemática y su coherencia interna, se ponen en evidencia en el hecho de que es posible desarrollar los contenidos con enfoques diferentes, con iguales resultados. Como muestra de esto que decimos, veremos brevemente en las siguientes secciones cómo pueden axiomatizarse las relaciones gráficas, la congruencia y la continuidad. También quedará patente cómo algunos objetos básicos de la geometría pueden ser primitivos o definidos según los axiomas escogidos, y cómo unos enunciados que en cierto sistema son postulados, son teoremas en otro.

17 Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916).

18 Dedekind define a todo número real como elemento de separación de una cortadura y establece un isomorfismo entre los números reales y las cortaduras.

Otro sistema de axiomas gráficos

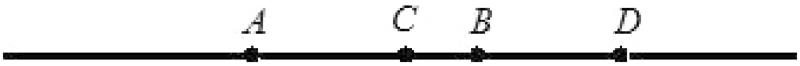
Veremos brevemente un desarrollo basado en un sistema de axiomas gráficos distinto del hilbertiano, siguiendo a la escuela de Pasch (véase cap. 5, pág. 94)[19]. Se adoptan como entes primitivos el *punto*, el *segmento* y la *región plana finita*, considerándose estos dos últimos más intuitivos que la recta y el plano.

Axioma 1 – Hay infinitos elementos llamados *puntos*.

Axioma 2 – Dos puntos cualesquiera *A*, *B*, determinan unívocamente un conjunto de infinitos puntos llamado *segmento* $\overline{AB}$.

A y *B* son los *extremos* del segmento. Siguen las definiciones (que no incluyo) de *punto interior* y *punto exterior* al segmento $\overline{AB}$.

Axioma 3 – (Fig. 43). Si *C* es interior a $\overline{AB}$, no está *B* en $\overline{AC}$ ni *A* en $\overline{BC}$.



(Fig. 43)

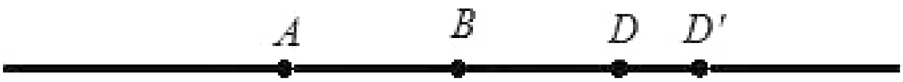
Axioma 4 – Si *C* es interior a $\overline{AB}$, todos los puntos de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ pertenecen a $\overline{AB}$.

Axioma 5 – Si *C* es interior a $\overline{AB}$, todo punto de $\overline{AB}$ está en $\overline{AC}$ o en $\overline{BC}$.

Se define *prolongación de* $\overline{AB}$ *por el extremo B* como el conjunto de los puntos *D* (Fig. 43) tales que *B* es interior al $\overline{AD}$. Su símbolo es $\overrightarrow{AB}$.

Un punto no puede pertenecer simultáneamente a $\overline{AB}$ y a una de sus prolongaciones, ni a ambas prolongaciones a la vez.

Axioma 6 – (Fig. 44). Si $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BD'}$ son prolongaciones de $\overline{AB}$ por el extremo *B*, *D* está en $\overline{BD'}$ o *D'* está en $\overline{BD}$.



(Fig. 44)

Axioma 7 – (Fig. 45). Si *D* está en $\overrightarrow{AB}$ y *E* en $\overrightarrow{BA}$, *A* y *B* están en $\overline{DE}$.

(Fig. 45)

19 El sistema es de Julio Rey Pastor (1888-1962), véase Toranzos (1943: 138-140).

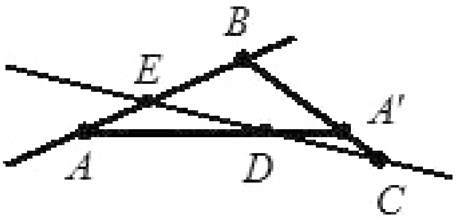
Todavía no se ha hablado de la recta. Justamente a continuación esta *se define*. En este ordenamiento de la teoría la recta es un ente *definido*: se llama *recta AB* al conjunto de los puntos de un segmento $\overline{AB}$ y de sus dos prolongaciones $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$. Podemos escribir, con notación conjuntista:

$$AB = \overrightarrow{BA} \cup \overline{AB} \cup \overrightarrow{AB}$$

Ya se puede *demostrar* (no voy a incluir aquí la prueba) que *una recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos*. Ahora entra la segunda dimensión:

Axioma 8 – Hay puntos exteriores a toda recta.

Axioma 9 – (Fig. 46) Si *A*, *B*, *C*, son tres puntos no alineados, *A'* es interior a $\overline{BC}$ y *D* es interior a $\overline{AA'}$, las rectas *AB* y *CD* tienen un punto *E* en común.



(Fig. 46)

Claramente este postulado cumple el mismo papel que el axioma de Pasch, el O_5 de Hilbert: caracterizar el ordenamiento de puntos en el plano.

Siguen las definiciones de *ángulo,* de *triángulo* y (sorprendente) de *plano*: si *A*, *B*, *C*, son tres puntos no alineados, se llama *plano* al conjunto de los puntos de todas las rectas determinadas por cada uno de esos puntos con cada uno del segmento definido por los otros dos (¡haga un dibujo y lo verá!). Es una definición muy interesante.

Sobre lo hecho hasta ahora se demuestran estos teoremas:

a) un plano está determinado por tres cualesquiera de sus puntos, no alineados;

b) toda recta que tiene dos puntos en un plano está contenida en él.

Y para finalizar el desarrollo del enfoque presentado, se agrega un axioma que permite introducir la tercera dimensión:

Axioma 10 – Hay un punto exterior a cada plano.

Hemos visto un ejemplo de lo ya dicho: un objeto es primitivo o definido, y un enunciado es postulado o teorema, según el ordenamiento dado a la teoría.

Otra manera de axiomatizar la congruencia

Los postulados de congruencia del sistema de Hilbert son una manera de caracterizar tal relación. En otros sistemas se axiomatiza el concepto de *movimiento* (un movimiento geométrico, no físico), así que dos figuras son congruentes si existe un movimiento que puede "poner una sobre otra" tal que coincidan todas sus partes. El movimiento geométrico es una transformación puntual biunívoca (o sea una *función* que hace corresponder puntos del espacio a puntos del espacio). Sigue ahora un ejemplo de axiomas alusivos (Toranzos, 1943: 143)[20]:

Axioma 1 – En un movimiento una recta se transforma en una recta.

Axioma 2 – Dados una semirrecta *a* con origen *A* y un semiplano α de borde la recta que contiene a *a*; y dados una semirrecta *a'* de origen *A'* y un semiplano α' de borde la recta que contiene a *a'*, existe un movimiento que hace corresponder *A* con *A'*, *a* con *a'* y α con α'.

Axioma 3 – Si en un movimiento quedan fijos tres puntos no alineados, quedan fijos todos los demás puntos (es decir que ese movimiento es la transformación idéntica).

Lo expuesto va de la mano de que los movimientos en el espacio tienen estructura de *grupo*, esto es, que el producto o composición de dos movimientos es otro movimiento y que cada movimiento tiene un inverso.

En Moise (1974) puede verse un enfoque de la congruencia de segmentos a partir de la *distancia* y de la congruencia de ángulos a partir de la *amplitud angular*. Ambas, distancia y medida angular, se definen como funciones, en un tratamiento métrico de la geometría desarrollado desde la teoría de los números reales[21]. Como se ve, el estudio de la geometría es rico en posibilidades.

Alternativa para axiomatizar la continuidad

Un camino diferente para axiomatizar la continuidad es el de Cantor, utilizando nuestro anterior postulado Co_1 y este otro (de enunciado algo largo)[22]:

Axioma Co_2' – (Fig. 47). Dadas dos sucesiones monótonas de segmentos $\overline{OA_i}, \overline{OB_i}$, tales que

a) $\overline{OA_1} < \overline{OA_2} < \overline{OA_3} <\ldots< \overline{OA_n} <\ldots$,

$\overline{OB_1} > \overline{OB_2} > \overline{OB_3} >\ldots> \overline{OB_n} >\ldots$,

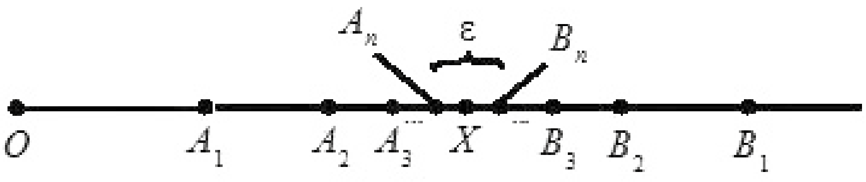
b) $\overline{OA_n} < \overline{OB_n}$ para todo *n*, y

20 Este enfoque fue iniciado por Hermann von Helmholtz (1821-1894) y perfeccionado por Klein. Véase cap. 14, pág. 249.

21 Iniciado por George D. Birkhoff (1884-1944). Véase cap. 14, pág. 255.

22 Debe tenerse en cuenta aquí que, para simplificar, la notación que usé para los segmentos representa tanto a ellos como a sus longitudes. Véase en "Consideraciones preliminares", pág. 21.

c) para cualquier segmento arbitrario ε existe un subíndice m tal que para todo $n > m$ se verifica $\overline{A_n B_n} < \varepsilon$, entonces existe un punto X único tal que para todo n: $\overline{OA_n} \leq X \leq \overline{OB_n}$.



(Fig. 47)

Se ve claramente que la longitud de los segmentos $\overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 B_2}, \ldots$ es cada vez menor y tiende a cero a medida que avanza el valor del subíndice n. Este método de Cantor para introducir la continuidad se conoce como el *principio de los intervalos encajados.* El punto X es el límite común de las sucesiones monótonas convergentes. Cualquier par de estas sucesiones de puntos sobre la recta tiene un punto límite único.

De este axioma surge que a cada número corresponde un punto de la recta. Es equivalente a Co_2 (de completitud) pero, caso interesante, lo es sólo si previamente se acepta Co_1 (de Arquímedes). Para ampliar sobre este aspecto, véase Toranzos (1943: 149).

[Capítulo 7]

El postulado V de Euclides

> Euclides realizó su tarea con tal perfección que solo el desarrollo intelectual de las últimas décadas del siglo XIX pudo darle alcance y generalizar su obra, confirmándola más que atacándola con dicha generalización (Colerus, 1972: 49).

> Puede decirse, aunque ello resulte extraño, que el primer matemático que contribuyó al descubrimiento de tales geometrías no euclidianas es el mismo Euclides (Hausmann, 1968: 37).

El celebérrimo "postulado de las paralelas"[1] nos va a ocupar un tiempo la atención. Fue el desencadenante de uno de los más apasionantes desafíos intelectuales de todos los tiempos. En aras de darle respuesta salieron a la luz, entre otras cosas, las geometrías no euclidianas. ¡Es por esto que se suele considerar a Euclides como el primer promotor de esas geometrías!

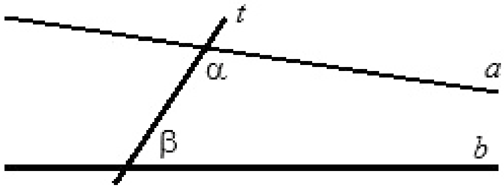
Nació el Postulado en *Elementos* y la compleja problemática que se originó fue resuelta, increíblemente, luego de una veintena de siglos. Como es común que suceda en la historia de los problemas famosos (y más allá del hallazgo de una solución, que puede o no acontecer) se produce un enriquecimiento de los contenidos de la ciencia y surgen reflexiones relacionadas con ellos.

El postulado bajo sospecha

> Antes de él [Euclides] la teoría de las paralelas parece haber sido defectuosa, tal como puede inferirse a través de la crítica de Aristóteles, si bien no sabemos exactamente en qué consistía el defecto. Con el fin de dar a la teoría firme fundamento, formula Euclides su Quinto Postulado (...) que fundamenta firmemente la teoría de las paralelas pero que origina, sin embargo, un nuevo problema (Hausmann, 1968: 37).

Aunque debamos repetirlo, leamos con atención el enunciado del Postulado V, pero ahora con terminología moderna:

si una recta corta a otras dos y en uno de los semiplanos que determina se forman ángulos conjugados internos cuya suma es menor que dos rectos, las rectas dadas se cortan en dicho semiplano (Fig. 48).



(Fig. 48) La célebre disposición de rectas del Postulado V

1 En algunas ediciones de *Elementos* figura como "Axioma XI".

Por ser el lenguaje matemático moderno más conciso y preciso, este enunciado es más breve que el del original (véase cap. 4, pág. 62), el cual, además, es menos intuitivo que sus postulados compañeros I a IV.

Obsérvese, además, la presencia de un *si-entonces*, lo cual le da un notable aspecto de teorema.

A estas notas pueden añadirse otras, a saber:

- La Proposición I.17 de *Elementos* (véase cap. 4, pág. 70) es el *recíproco* del Postulado V y resulta extraño que dos enunciados matemáticos, teorema uno, postulado el otro, guarden esa relación de reciprocidad. Siendo más detallistas, fijémonos que en la Proposicion I.17 dice que dos ángulos cualesquiera de un triángulo suman siempre menos de dos ángulos rectos, mientras que el Postulado, por su parte, afirma que bajo la condición cumplida de que los dos ángulos conjugados sumen menos de dos rectos, se forma un triángulo entre las tres rectas protagonistas del hecho geométrico. Algunos comentaristas del pasado opinaron que el Postulado debería haber estado entre las proposiciones, junto a la I.17, precisamente.

- Euclides hizo un uso tardío del Postulado V. Demostró veintiocho teoremas sin él y recién en la Proposición I.29 lo utilizó por primera vez. Llamativamente, prefirió aplazar su uso lo más posible, pese a que pudo usarlo antes, como si él mismo no estuviera muy convencido (Hausmann, 1968: 38)[2].

Que sea menos intuitivo o que fue usado tardíamente no son razones estrictamente matemáticas que digamos, pero lo cierto es que todos estos ingredientes se mezclaron en una poción que embrujó a los matemáticos. A partir de allí intentaron *deducirlo* basándose en los axiomas y en los cuatro primeros postulados. Los innumerables esfuerzos realizados (que, de tener éxito, lo habrían transformado en teorema) fracasaron irremediablemente.

¿Cuál fue la causa de estos fracasos? El círculo vicioso (véase cap. 3, pág. 53). Justamente, en las argumentaciones los matemáticos admitían una y otra vez postulados equivalentes al V, en el sentido que se explicó en el cap. 5, pág. 81. Pero no se trataba de poca inteligencia; tales postulados equivalentes eran sutiles, imperceptibles, y se colaban en el razonamiento y en la buena fe del entusiasmado pensador.

Algunos intentos de demostración

> Sin duda, Euclides habría preferido, de muy buena gana, *demostrar* este patito feo, en lugar de tener que darlo por *supuesto* (Hofstadter, 2007: 102).

Examinaremos aquí algunos ejemplos de falsas demostraciones (y también más adelante, luego de tratar algunos temas necesarios). Los "ataques" al problema fueron:

- a veces frontales, es decir, que se iba tras la demostración del mismísimo enunciado del Postulado tomado como tesis de un teorema, tal como se muestra seguidamente en los cuatro primeros intentos;

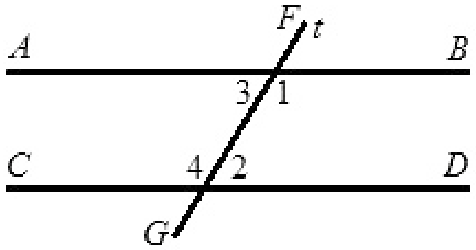
- o bien se cargó "por la retaguardia", por reducción al absurdo, como en el intento de pág. 124, en el gran intento del capítulo 8 y en el cap. 10, pág. 206;

2 ¡Somos atrevidos, nos hemos metido con nuestra suposición en la psiquis de Euclides!

- o “por el flanco”, tratando de hallar una prueba, sin recurrir al Postulado, de un teorema *del cual el Postulado fuera una consecuencia.* Tal es el caso de los intentos quinto, sexto y séptimo presentados, también en el cap. 8 y en cap. 10, pág. 204[3].

El intento de Claudio Ptolomeo (c. 85-c. 165). Ataque directo

Este famoso astrónomo, conocido por su dominante modelo geocéntrico del Sistema Solar, fue también un importante matemático. Además de trabajos de trigonometría, nos dejó el siguiente teorema falso que “demuestra” el Postulado V (Guasco et al., 1996: 151; Bonola, 1945: 21).



(Fig. 49)

Considérense las rectas paralelas *AB* y *CD*, cortadas por la transversal *t* (Fig. 49). Se tiene que $\hat{1} + \hat{3} = 2R$ por ser adyacentes y, por lo tanto, suplementarios. Por la misma causa, $\hat{2} + \hat{4} = 2R$. Esto nos conduce a $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 4R$ (*)

Si fuese $\hat{1} + \hat{2} > 2R$ sería también $\hat{3} + \hat{4} > 2R$, ya que a ambos lados de *t* hay una situación completamente simétrica de las paralelas. Pero estas dos desigualdades son imposibles porque sumándolas miembro a miembro resulta $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} > 4R$, lo que contradice la igualdad (*).

Razonando de manera análoga, también es imposible $\hat{1} + \hat{2} < 2R$, etcétera.

No queda entonces otra opción y debe ser $\hat{1} + \hat{2} = 2R$. Resulta, entonces, que ha demostrado la implicación *AB // CD* $\Rightarrow \hat{1} + \hat{2} = 2R$.

La lógica nos enseña que el contrarrecíproco también es cierto, así que $\hat{1} + \hat{2} \neq 2R \Rightarrow$ *AB* corta a *CD*, por lo que queda demostrado el postulado V.

Antes de decir dónde está la falla de esta “demostración”, preguntémonos en qué parte de la argumentación se ha *aceptado algo sin discutir*, dándolo por cierto sin poner objeciones (*tic, tac, tic, tac, ...*). Esto ha pasado con la afirmación:

“a ambos lados de *t* hay una situación completamente simétrica de las paralelas”.

3 Por abuso de lenguaje diré “demostrar el Postulado” lo que es incoherente pues un postulado no se demuestra. Quiero decir “demostrar el *enunciado* del Postulado”. Por otra parte, la terminología militar que utilicé es solo un adorno metafórico para evocar el combate intelectual sin tregua que se estaba desarrollando. ¡Al ataque, mis valientes!

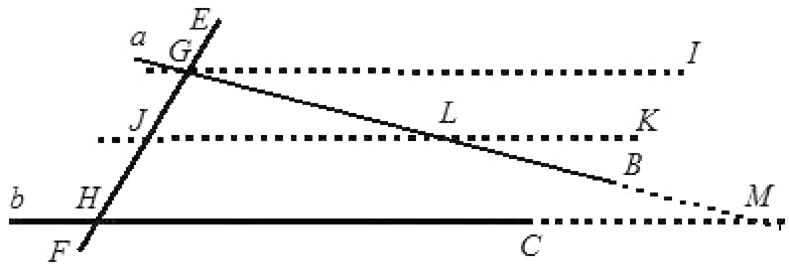
O sea que (obsérvese que nos referimos a semirrectas) si es cierto que $\overrightarrow{FB} \mathbin{//} \overrightarrow{GD}$, también resulta $\overrightarrow{FA} \mathbin{//} \overrightarrow{GC}$. De hecho, tal enunciado *es aquí un postulado*, pues lo hemos admitido como verdadero sin que medie una demostración. Y además es *equivalente* al V de Euclides. Ptolomeo incurrió en petición de principio[4].

Intento de John Wallis (1616-1703). Ataque directo

Este notable matemático inglés, de época próxima al surgimiento del Cálculo, propuso la siguiente interesante prueba del Postulado:

sean *a* y *b* dos rectas cortadas por la transversal *EF* en *G* y *H*, con las condiciones del Postulado (Fig. 50), (Hausmann, 1968: 40; Bonola, 1945: 32) es decir:

$\angle CHG + \angle FGB < 2\text{R}$. (1)



(Fig. 50)

Se tiene que $\angle FGB + \angle BGE = 2\text{R}$, por ser adyacentes. (2)

De (1) y (2) se deduce que $\angle CHG < \angle BGE$. (3)

Si ahora se traslada *H* sobre la recta *EF* con *b* rígidamente unida a él hasta que *H* coincida con *G*, entonces por (3) $\overrightarrow{HC}$ ocupará la posición $\overrightarrow{GI}$, interior al $\angle BGE$. Esto implica que, en alguna posición intermedia, tal como $\overrightarrow{JK}$, debió cortar a *a* en un punto *L*.

Sobre la base $\overline{GH}$ se construye el triángulo *GHM* semejante al *GJL*. Pero esto significa que *a* y *b* se encuentran en el punto *M*, vértice de aquel triángulo y ¡el Postulado ha sido demostrado! ¡Magnífico!

Lamentablemente hay que suspender el brindis de Wallis pues la demostración es falsa. Nótese que ciertamente fue admitido (sin discusión) que *es factible construir el triángulo GHM semejante al GJL*. Esto, como quedará en evidencia más adelante, es un postulado equivalente al de Euclides.

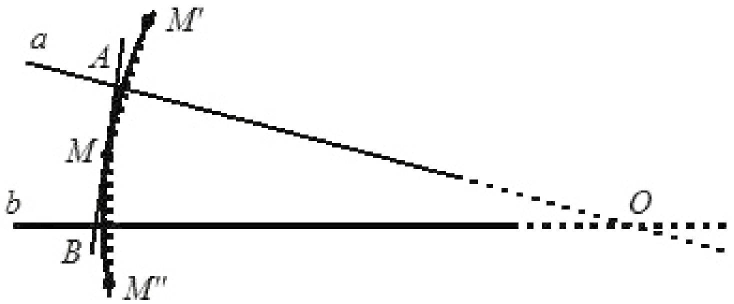
4 Pido al lector un poco de paciencia y que no trate de entender cabalmente todo de una vez. Las ideas necesitan de una gradual maduración. Esto resultará clarísimo más adelante.

Intento de Wolfgang Bolyai (1775-1856). Ataque directo

El húngaro Wolfgang (o Farkas) Bolyai, quien trabajó en el problema del Postulado por bastante tiempo, fue padre de János Bolyai (1802-1860), uno de los fundadores de la geometría no euclidiana denominada "hiperbólica". Junto con el alemán Carl Gauss (1792-1856), que fue compañero de universidad de Wolfgang, y el ruso Nicolai Lobachevski (1792-1856) dieron los primeros pasos en esa nueva geometría. En realidad se les había adelantado el jesuita italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), pero su obra permaneció largo tiempo desconocida y fue por él mismo injustamente dimensionada, porque no la consideró una geometría válida.

W. Bolyai parte de tres rectas *a*, *b* y *AB*, en las condiciones del Postulado (Fig. 51) (Guasco et al., 1996: 152).

Se toma *M*, punto medio del $\overline{AB}$. Se trazan los puntos *M'* y *M"* simétricos de *M* respecto de *a* y *b*.



(Fig. 51)

M, *M'* y *M"* no pueden estar alineados (piense por qué[5]); por eso determinan una única circunferencia. $\overline{MM'}$ y $\overline{MM''}$ son, por lo tanto, cuerdas de ella. Por la construcción efectuada, las rectas *a* y *b* contienen a las mediatrices de esas cuerdas que, como se sabe, se cortan en el centro *O* de la circunferencia. Esto significa que *a* y *b* se cortan en *O*, lo que demuestra el Postulado.

Aquí se ha admitido que *por tres puntos no alineados pasa una circunferencia.* Pero esto depende de que las mediatrices de los lados de un triángulo concurran en un punto a distancia finita, lo que va ligado a la aceptación previa del Postulado V[6].

Además, en relación con la recta *MM"*, *b* y *a* son, respectivamente, perpendicular y oblicua a ella. Como se verá más adelante, el que una perpendicular y una oblicua a una misma recta se corten, depende también del Postulado[7].

Luego de cansarse de intentar, Bolyai padre quiso convencer a su hijo János de que no perdiera el tiempo con las triquiñuelas del Postulado:

5 De ser así, los ángulos conjugados internos a la derecha de *AB* sumarían 2R, en contra de la hipótesis.

6 Esto se aclara en cap. 10, pág. 192. En Bartrina y Capella (1908: 79) puede verse el tratamiento de la circunferencia como un caso especial de una curva denominada "ciclo".

7 Con esta idea central se presenta en Bonola (1945: 72) la demostración de W. Bolyai.

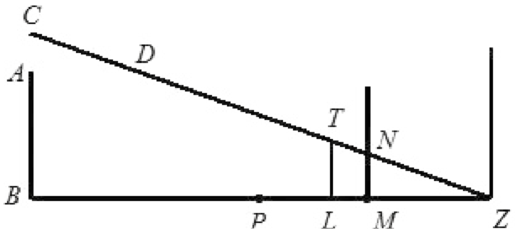
> No te sumerjas en el estudio de las paralelas. Conozco ese camino hasta el final. He atravesado esa noche sin fondo, que consumió toda la luz y todo el goce de mi existencia. Te lo ruego, deja en paz la ciencia de las paralelas... Yo me dispuse a sacrificarme en beneficio de la verdad; estaba decidido a convertirme en un mártir que desalojaría el error del seno de la geometría, y se la devolvería purificada a la humanidad[8]. He realizado una monstruosa, enorme labor; mis logros han sido mucho más plenos que los de otros, pero no he podido cumplir por entero la tarea. Aquí es verdad aquello de que *si paullum a summo discessit, vergit ad imum*[9]. He emprendido el regreso al ver que ningún hombre puede llegar al fondo de esta oscuridad. He emprendido el regreso desconsolado, compadeciéndome y compadeciendo a la humanidad... He atravesado todos los escollos de este infernal Mar Muerto, y he vuelto siempre con el mástil roto y las velas rasgadas. La decadencia de mi voluntad, y mi ruina, tienen esta causa. Irreflexivamente, expuse mi vida y mi felicidad; *aut Caesar aut nihil*[10].

Afortunadamente el hijo hizo caso omiso y luego, cuando Bolyai padre notó el triunfo de János, escribió: "Cuando llega el tiempo de sazón para ciertas cosas, éstas aparecen en diferentes lugares[11], a la manera de las violetas que se abren en los comienzos de la primavera" (Hofstadter, 2007: 104).

Luego de este momento literario sensibilísimo, continuemos examinando más esfuerzos por obtener la manida demostración.

El intento que se debe posiblemente a un tal Aganis. Ataque directo

Aganis es un personaje antiguo bastante desconocido, que algunos historiadores identifican con el filósofo Gemino de Rodas, aunque no hay certeza al respecto. Su demostración fue recogida por Gerardo de Cremona, traductor muy importante del S. XII, de una obra del árabe Al-Nayrizi[12].



(Fig. 52)

8 Esto que afirma Bolyai se debe a que era considerado un verdadero escándalo de la geometría el no haber resuelto, a esas alturas de la historia, el problema del Postulado.

9 Verso de la *Epístola de Horacio a los Pisones*: "A poco que se aparte de la perfección, da en el extremo opuesto".

10 "O César o nada".

11 Tal vez aludiendo a que la geometría hiperbólica fue descubierta simultáneamente por su hijo y Gauss, además de Lobachevski. En la historia de las ciencias no es poco frecuente la aparición casi simultánea de ideas o inventos que "estaban flotando en el aire", a la espera de personas que los trajeran a la existencia. En matemática son notables en este sentido: la invención de los logaritmos por Napier y Bürgi (S. XVI), el esbozo de las ideas centrales de la geometría analítica por Fermat y Descartes (S. XVII), y la fundación del cálculo por Newton y Leibniz (S. XVII).

12 Fechas aproximadas: Gemino de Rodas (10-60), Gerardo de Cremona (1114-1187), al-Nayrizi (875-940). La demostración aquí presentada se ha adaptado de Bonola (1945: 25).

Sean AB y DZ dos rectas cortadas por la transversal BZ (Fig. 52) tales que los ángulos $\angle ABZ$ y $\angle BZD$ suman menos de dos rectos. No se quita generalidad si se supone $\angle ABZ$ recto.

Se toma sobre DZ un punto arbitrario T y se traza $\overline{TL} \perp BZ$. Se determinan luego el punto medio P de $\overline{BZ}$, el punto medio M de $\overline{PZ}$, etcétera, hasta que uno de los puntos medios (en la figura es el M) cae en el $\overline{LZ}$. Por ese punto M se construye la perpendicular a BZ, que encuentra a DZ en N.

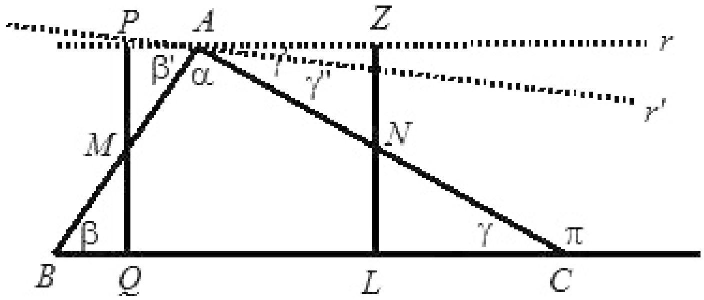
Ahora sobre DZ se traza $\overline{CZ}$, múltiplo de $\overline{ZN}$ tanto como $\overline{ZB}$ es múltiplo de $\overline{ZM}$ en nuestro dibujo, como $\overline{ZB} = 4.\overline{ZM}$, se toma $\overline{ZC} = 4.\overline{ZN}$.

C resulta ser, entonces, el punto de encuentro de AB y DZ, lo que demuestra el Postulado.

Esta prueba tiene dos puntos objetables que luego el lector comprenderá más acabadamente. Se notará inmediatamente que se trata de aspectos muy sutiles. Uno: aunque es un hecho con gran evidencia intuitiva, no hay garantía de que la perpendicular MN se encuentre con la oblicua DZ, tal como se lo ha aceptado en la prueba. Dos: al operar como se hizo con los múltiplos, se admite tácitamente que si se tienen segmentos congruentes sobre la oblicua DZ éstos se corresponden con segmentos congruentes sobre BZ.

El intento a partir de la suma de ángulos del triángulo. Ataque por el flanco

Si demostráramos que la suma de ángulos interiores (S_i) de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos, sin utilizar el Postulado, podría llegarse desde ese punto a deducir éste. Recordemos brevemente la demostración escolar de que S_i es igual a 2R (Fig. 53):



(Fig. 53)

Sea el triángulo ABC. Se dibuja por A una *recta paralela r* al lado $\overline{BC}$. Quedan determinados los pares de ángulos congruentes β' = β y γ' = γ (por ser alternos internos entre las paralelas *r* y *BC* cortadas por las transversales respectivas *AB* y *AC*). Como β' + α + γ' forman un ángulo llano, en virtud de las igualdades angulares dichas, resulta β + α + γ = 2R (= S_i del *ABC*).

Ahora haremos el ejercicio de *aceptar sin demostración* (o sea como *postulado*) que la S_i del *ABC* es 2R, e intentar desde allí demostrar el Postulado V o alguno equivalente a él. Volvemos a la Fig. 53 (ignorando la recta *r*).

Suponemos que α + β + γ = 2R.

Trazamos los puntos medios M y N de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Se construye $\overline{NL} \perp \overline{BC}$ y, prolongando dicho segmento, se traza $\overline{NZ} = \overline{NL}$. Se dibuja $\overline{AZ}$. Los triángulos que han quedado formados, *NLC* y *NZA* son congruentes por criterio LAL, de donde γ' = γ.

También, construyendo $\overline{MQ} \perp \overline{BC}, \overline{MP} = \overline{MQ}$ y $\overline{AP}$, resulta β = β' en los triángulos congruentes *BQM* y *APM*.

De todo esto se deduce que β' + α + γ' = β + α + γ = 2R, lo que significa que los puntos *P*, *A* y *Z*, están sobre una misma recta *r*, y también que los ángulos conjugados internos π y γ' son suplementarios.

Las rectas *r* y *BC* no pueden cortarse porque, suponiendo que se cortaran en un punto *X* (no se ve en la figura), resultaría un triángulo *ZLX* con dos ángulos rectos, lo que contradice el teorema I.17 de Euclides. Podemos decir que *r* es la paralela a *BC* por *A*.

¿Es única esta paralela a *BC* por *A*? Supongamos que hay otra, *r'*.

Hemos demostrado que la siguiente implicación es cierta:

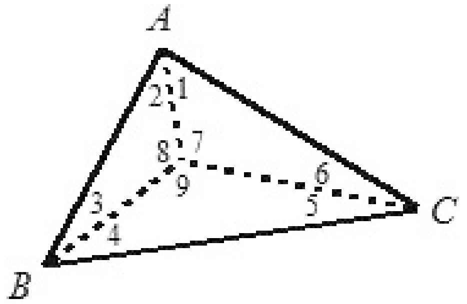
β + α + γ = 2R ⇒ los ángulos conjugados internos son suplementarios. (1)

Luego la proposición contrarrecíproca también es cierta, a saber:

Los ángulos conjugados internos no son suplementarios ⇒ β + α + γ ≠ 2R. (2)

Si existiera por *A* otra recta *r'* que no cortara a *BC*, ella formaría con *AC* un ángulo γ'' < γ' y se estaría cumpliendo la implicación (2) que contradice el axioma admitido que afirma que la S_i del *ABC* es 2R. Por lo tanto la paralela *r* a *BC* por *A* es única, y esto es el Postulado V.

El siguiente teorema falso (desconozco el autor, aunque supongo que muchos siguieron esta senda) "prueba" que S_i = 2R sin usar el Postulado.



(Fig. 54)

Comenzamos con un triángulo cualquiera *ABC*, un punto interior *O* y los segmentos que unen a este con cada vértice: $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ (Fig. 54) (Guasco et al., 1996: 152).

El *ABC* queda fraccionado en tres triángulos, cuyos nueve ángulos se numeran en la figura (se omite el punto *O* para mayor claridad).

Se tiene: $\hat{1}+\hat{2}=\hat{A}, \hat{3}+\hat{4}=\hat{B}, \hat{5}+\hat{6}=\hat{C}$. (1)

Además: $\hat{7}+\hat{8}+\hat{9}=4\mathrm{R}$, pues su unión forma el plano. (2)

Suponemos que la S_i de un triángulo cualquiera es un valor x, entonces, para los cuatro triángulos de la figura:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=x, \hat{1}+\hat{6}+\hat{7}=x, \hat{2}+\hat{3}+\hat{8}=x, \hat{4}+\hat{5}+\hat{9}=x$. (3)

Sumando miembro a miembro las tres últimas igualdades (3), y ordenando y asociando términos, resulta:

$$(\hat{1}+\hat{2})+(\hat{3}+\hat{4})+(\hat{5}+\hat{6})+(\hat{7}+\hat{8}+\hat{9})=3x,$$

que, teniendo en cuenta (1) y (2), nos lleva a:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+4\mathrm{R}=3x.$$

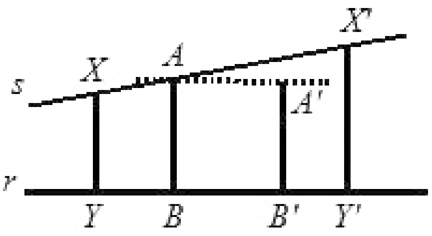
Pero, por la primera igualdad de (3), podemos escribir $x+4\mathrm{R}=3x$, de donde $4\mathrm{R}=2x$ y luego ¡$x=2\mathrm{R}$!

Se ha demostrado que $S_i=2\mathrm{R}$ para cualquier triángulo, pero solo aparentemente. En efecto, nuevamente preguntamos: ¿qué afirmación fue aceptada anodinamente sin discutirla siquiera? Pues justamente aquella equivalente al Postulado V: *la suma de ángulos interiores de un triángulo es un valor constante* (el que nosotros llamamos x). El lector entenderá bien el porqué más adelante. Por ahora esto está lleno de sorpresas...

El intento de Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274). Ataque por el flanco

Los árabes, entre los siglos IX y XIII protagonizaron un destacadísimo papel en la historia de la matemática y la ciencia en general. No estuvieron ajenos al problema del Postulado, como lo atestigua el siguiente teorema del astrónomo y matemático al-Tusi, conocido, además, por comentar algunos trabajos griegos (Bonola, 1945: 26)[13].

Sean un segmento $\overline{AB}$, una recta *r* perpendicular a él y otra *s*, oblicua a él (Fig. 55). Si se trazan desde *s* segmentos perpendiculares a *r*, estos serán más cortos en la región donde *s* forma con $\overline{AB}$ un ángulo agudo ($\angle BAX$), y más largos en la región donde forma un ángulo obtuso ($\angle BAX'$); por ejemplo, en la figura, se tiene $\overline{XY}<\overline{AB}<\overline{X'Y'}$. Entonces, si se tiene un segmento $\overline{A'B'}\perp r$, congruente con $\overline{AB}$, necesariamente resultará que $AA'\perp\overline{AB}$ y $AA'\perp\overline{A'B'}$.



(Fig. 55)

13 Nasir al-Din al-Tusi es un nombre transliterado. También se lo puede hallar nombrado como Nasir-Eddin.

De aquí resulta (no lo demostraremos) que $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ y por lo tanto el *ABB'A'* es un rectángulo. Nasir al-Din probó luego de esto, como mostramos a continuación, que la suma de ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos y desde esta "plataforma" demostró el Postulado V.

Su demostración no es válida pues hay dos hechos que Nasir acepta, relacionados entre sí e íntimamente unidos al Postulado V, como también se verá:

a) que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (*r*) es otra recta (*AA'*);

b) que las rectas *r* y *AA'* tienen perpendiculares compartidas (como *AB* y *A'B'*).

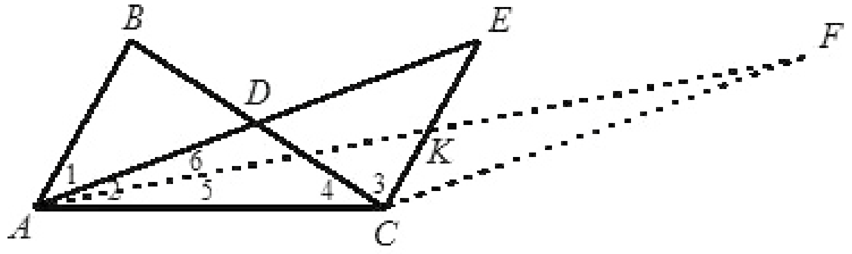
El intento Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Ataque por la retaguardia (*reductio ad absurdum*)

Legendre fue un matemático francés que se destacó por trabajos sobre integrales elípticas, la irracionalidad del número π y una interesante incursión por el problema de las paralelas.

"Adrián-Mario" niega el Postulado V y parte en búsqueda de una contradicción surgida de tal negación (Hausmann, 1968: 43)[14]. La negación es indirecta, porque supone que la S_i de un triángulo *no es* 2R. Si por esa vía se llega a un absurdo, entonces es $S_i = 2R$ y de allí se puede deducir el Postulado.

Sea el triángulo *ABC* (Fig. 56). Se parte del supuesto de que la suma de sus ángulos interiores es *mayor que dos rectos*: $S_i = 2R + \theta$[15].

Se traza el punto medio *D* de $\overline{BC}$, se dibuja $\overline{AD}$ y se lo prolonga hasta *E*, tal que $\overline{DE} = \overline{AD}$. Se traza $\overline{EC}$, quedando así determinado el triángulo *ACE*. Fácilmente se demuestra que los triángulos *ABD* y *CED* son congruentes y de esto resultan las igualdades $\hat{1} = \hat{E}, \hat{3} = \hat{B}$. (1)



(Fig. 56)

En el *ABC* es $S_i = \hat{1} + \hat{2} + \hat{4} + \hat{B}$. (2)

En el *ACE* es $S_i = \hat{3} + \hat{4} + \hat{2} + \hat{E}$. (3)

14 El aquí expuesto se conoce como Segundo Teorema de Legendre.

15 La letra griega θ (theta), que aquí representa el exceso sobre 2R de la S_i del triángulo *ABC*, se pronuncia "tzeta", o incluso "zeta", no "tita" como se escucha frecuentemente de muchos profesores de matemática. Lo mismo sucede con μ (mi), mal pronunciada "mu".

Se nota inmediatamente, por (1), que (2) y (3) dan el mismo valor de suma de ángulos, por lo tanto, en el ACE la S_i también es 2R + θ. Legendre nos muestra así que, partiendo de un triángulo y mediante la construcción efectuada, se obtiene siempre otro triángulo donde se conserva la S_i.

Volviendo al ABC vemos que entre los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ uno será menor o igual a la mitad de $\hat{A}$. Supongamos aquí que $\hat{2} \leqslant \frac{\hat{A}}{2}$. (4)

Es posible ahora repetir la construcción inicial, pero ahora a partir del triángulo ACE, con K punto medio de $\overline{EC}$ y $\overline{AK} = \overline{KF}$ (aclaramos que si el caso hubiera sido $\hat{1} \leqslant \frac{\hat{A}}{2}$ la construcción debería hacerse a partir del triángulo ABD). Obtenemos así el triángulo ACF que también tiene S_i = 2R + θ. En este nuevo triángulo el ángulo $\hat{2}$ queda dividido en $\hat{5}$ y $\hat{6}$ y uno de ellos será menor o igual a la mitad de $\hat{2}$. Sea $\hat{5} \leqslant \frac{\hat{2}}{2}$. (5)

Reuniendo (4) y (5) podemos deducir que $\hat{5} \leqslant \frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{A}}{2^2}$.

Si continuáramos con este tipo de construcción, siempre teniendo en cuenta el ángulo “menor o igual que la mitad de...”, iríamos fabricando triángulos con *la misma S_i* pero con un ángulo en disminución que irá siendo menor o igual que $\frac{\hat{A}}{2^3}, \frac{\hat{A}}{2^4}, \ldots, \frac{\hat{A}}{2^n}$, y llegará a ser al fin, para cierto triángulo, menor que... ¡θ!

Pero esto último significa que los dos ángulos restantes de ese triángulo suman más de 2R lo que contradice el teorema I.17 de Euclides, según el cual esa suma debe ser menor que 2R. El absurdo provino de suponer que S_i = 2R + θ. ¡Hermoso teorema!

Es notable que, en cada paso de la construcción, el triángulo resultante tiene dos lados sensiblemente más largos que los del paso anterior. Por lo tanto, si deseamos efectuar varios trazados pronto estaremos en apuros, ya que necesitaríamos un papel de gran longitud para que quepan los dibujos. O sea que, a mayor cantidad de pasos constructivos, la longitud de estos dos lados *tiende a infinito*. Esta situación es clave en cierto modo; luego la recordaremos cuando convenga a la explicación.

Descartado que S_i > 2R, Legendre supuso que S_i < 2R, o sea S_i = 2R − θ. No es posible aplicar la misma argumentación anterior por lo que debe seguirse otro camino. Sin embargo, Legendre no pudo arribar a ningún absurdo partiendo de dicha suposición.

A lo largo de la historia y en todos los idiomas se han ensayado pruebas del Postulado V; todas incluían algún mortal círculo vicioso. Aquí hemos mostrado solo algunas. En el capítulo siguiente analizaremos al padre de todos los intentos (en mi modesta opinión): el del jesuita Saccheri. Y cuando sea oportuno, sumaremos otras dos tentativas de demostración que incorporan un ingrediente sutil y sabroso.

La geometría absoluta

Recibe este nombre la geometría "de los cuatro postulados", es decir, la que puede deducirse a partir de los postulados I a IV de Euclides, sin auxilio del V. Más en general, sin hacer referencia a los citados postulados, puede decirse que es la geometría independiente de los axiomas de paralelismo. Dado que el alejandrino recién recurrió al "patito feo" en la Proposición I.29, sus veintiocho teoremas anteriores pertenecen a la geometría absoluta. Un teorema de esta geometría, por ejemplo, el primer criterio de congruencia de triángulos, permanece válido en otras geometrías, aunque se admitan en ellas axiomas de paralelismo diferentes.

Postulados equivalentes al V

He aquí una primera lista de axiomas equivalentes al V. Agregamos a ella algunos más: P_5 aportado por Posidonio de Rodas; P_6, por Proclo de Bizancio y P_7 por John Playfair (1748-1819)[16]. Este último es el más popular enseñado en la actualidad.

Nº	Enunciado
P_1	A ambos lados de una transversal que corta a dos paralelas, la situación relativa al paralelismo es simétrica.
P_2	Es posible construir un triángulo semejante a otro[a].
P_3	Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia.
P_4	La suma de ángulos interiores de un triángulo es un valor constante.
P_5	Dos rectas paralelas se mantienen equidistantes (o bien: el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es otra recta).
P_6	Si una recta corta a una de dos paralelas, corta también a la otra.
P_7	Por un punto exterior a una recta pasa en su plano una única paralela a ella.
P_8	Las proyecciones sobre una recta, de unos segmentos congruentes, de extremos sobre una misma recta, son congruentes.

16 Posidonio de Rodas (c. 135-c. 51), Proclo de Bizancio (véase cap. 2, pág. 42), John Playfair (1748-1819). Este último fue un geólogo, físico y matemático escocés. Es conocido en el ambiente matemático justamente por su versión del Postulado V.

Distintos enfoques del problema del Postulado

El interés de los matemáticos en relación con el axioma que nos ocupa debe entenderse distintamente según de qué época se trate.

Dado que en la época de los griegos y en muchos siglos subsiguientes se admitía la conexión geometría-realidad de la que ya hemos hablado (véase cap. 1, pág. 34 y cap. 2, pág. 47), preguntábanse los matemáticos si el postulado obedecía a una ley natural, es decir, si era *verdadero* desde un punto de vista ontológico o físico. Sobre todo quedaba la duda de su veracidad cuando se estaba ante un par de rectas "casi" paralelas y cuyo punto de encuentro, en caso de haberlo, caía muy por fuera de los límites del dibujo.

Conforme la matemática fue madurando y con ella la geometría, la cuestión pasó a ser si el Postulado era *independiente*, o sea, si era deducible o no de los restantes axiomas. La pregunta pasó del terreno de lo metafísico al de lo formal-matemático, sin implicancias físicas.

a La semejanza implica igual forma y tamaño variable. En el caso particular de igual forma y tamaño, se tiene la congruencia. Otra igualdad en geometría es la equivalencia, es decir, igualdad de área.

[Capítulo 8]

El *Euclides... vindicatus...* de Saccheri

> ... [Saccheri] debe considerarse como un verdadero precursor de Lobachevski y Riemann; siendo víctima de la concepción de espacio dominante en su tiempo, según la cual la única geometría posible era la euclidiana, él mismo se las ingenió para destruir con sus propias manos (erróneamente, como veremos) el edificio genialmente así construido[1].

Un precursor olvidado

Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733) fue un sacerdote italiano de la Compañía de Jesús (o sea un jesuita), a quien le debemos una obra sorprendente: *Euclides, libre de toda mancha*, cuyo título abreviado en latín es *Euclides ab omni naevo vindicatus*[2]. El nombre de la obra se enmarca en el contexto del "escándalo" generado por el Postulado, que desde su aparición había resistido los esfuerzos de los matemáticos por demostrarlo.

Convencido de la veracidad del Postulado V (véase cap. 7, pág. 127), Saccheri afirma que no debería considerárselo un axioma y que sería conveniente demostrarlo (Saccheri, 1908: IX). En los siglos XVII y XVIII no había planteos de tipo metageométrico (de que tengamos noticia), por lo que su interés era netamente geométrico. Vale decir que estaba en sintonía con los pensadores que habían trabajado en el problema hasta el momento.

No obstante, a diferencia de todos sus predecesores, Saccheri elaboró un original intento para demostrar el Postulado, basado en el método indirecto o de reducción al absurdo[3]. El *Euclides... vindicatus...* incluye dos Libros, cada uno con dos partes. En el Libro I se ocupa del Postulado y en el II de otros temas particulares del Libro V de *Elementos.*

Hallamos en este autor un agudo geómetra y un innovador de la matemática, aunque no exento de posibles influencias, tales como las de Giordano Vitale (1633-1711) y del ya citado Nasir al-Din al-Tusi, quienes se ocuparon del problema del Postulado y cuyos teoremas guardan similitud con algunos de Saccheri (Bonola, 1945: 26 y 30). Sus finos teoremas cobran mayor valor si se tiene en

---

1 Dicho de Saccheri por Veronese, citado por Boccardini, G. en (Saccheri, 1904: IX).

2 El título completo es *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia.* Véase Bonola (1945: 37). Dejamos al lector que enfrente la aventura de perseguir la traducción.

3 Ninguna producción cultural es completamente original. Siempre las obras son hijas de su tiempo y confluyen en ellas múltiples influencias. La obra de Saccheri que veremos en este capítulo no es la excepción.

cuenta la época en la que fueron formulados y demostrados, y la misma mentalidad del autor, seguramente de sólida formación clásica.

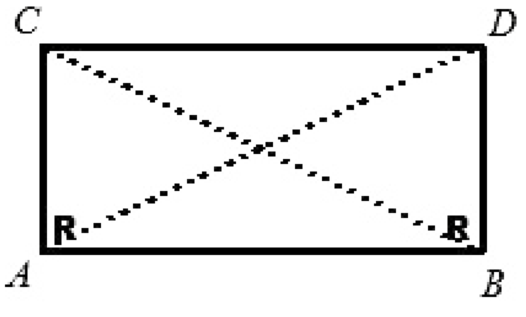
Saccheri ha sido comparado con Cristóbal Colón. El genial navegante genovés partió en misión a las Indias, pero descubrió el Nuevo Mundo. Lo mismo le sucedió a Gerolamo, quien "zarpó" con la idea de demostrar el Postulado, pero llegó a una nueva geometría. En efecto, como podremos ver, descubrió sin saberlo la geometría hiperbólica y se anticipó a Gauss, Lobachevski y Bolyai en ese campo.

El *Euclides... vindicatus...*, publicado el mismo año de la muerte de su autor, se difundió rápidamente desde su aparición e incluso está citado y analizado en textos de mediados del S. XVIII. Luego quedó en el olvido en alguna biblioteca, hasta que fue redescubierto y desempolvado por Eugenio Beltrami (1835-1899) en 1889. Posteriormente fue analizado y traducido al italiano, al francés, al inglés y al alemán (Saccheri, 1908: XV; Bonola, 1945: 55). Para esta época las geometrías no euclidianas ya habían visto la luz, pero esto no disminuye el mérito del jesuita. Seguramente el derrotero de la geometría hubiera sido otro de haberse conocido antes la obra de Saccheri.

En este capítulo nos ocuparemos del notable intento de este matemático, una auténtica joya geométrica[4]. Hay efectos secundarios: para el lector estudioso será también una fuente de interesantes descubrimientos. Uno de los gratos hallazgos que tuve en mi ejercicio de la enseñanza de estos temas, es que los estudiantes se introducían, sin advertirlo, en el hermoso mundo de la geometría hiperbólica mientras luchaban a brazo partido con los teoremas de Saccheri. Y de repente... ¡la geometría hiperbólica estaba allí, ante sus ojos!

El cuadrilátero birrectángulo isósceles

La figura básica es un cuadrilátero birrectángulo isósceles (que abreviaremos CBI), llamado hoy *cuadrilátero de Saccheri* (Fig. 57). El CBI *ABDC* tiene $\hat{A} = \hat{B} = 1R$ (por eso es *birrectángulo*) y $\overline{AC} = \overline{BD}$ (por eso es *isósceles*)[5]. Señalaremos los ángulos rectos con una R de trazo grueso.



(Fig. 57)

4 Seguiremos a (Saccheri, 1908), Libro I, Primera parte.

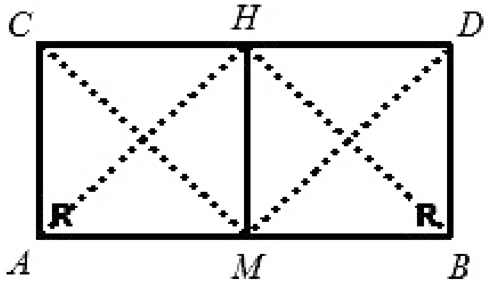
5 Respetamos el orden de los vértices de la fuente bibliográfica. Nosotros pondríamos *ABCD*.

A partir de aquí recorreremos un itinerario por las principales proposiciones. Si bien Saccheri elaboró demostraciones al estilo de Euclides, adaptaré la redacción y la argumentación haciéndola más esquemática y breve.

PROPOSICIÓN I: *en el* CBI *ABDC es* $\hat{C} = \hat{D}$.

Demostración: se trazan las diagonales del CBI (Fig. 57). Los triángulos *CAB* y *DBA* son congruentes por criterio LAL (Euclides I.4). Basándonos en esto, los triángulos *ACD* y *BDC* son congruentes por criterio LLL (Euclides I.8)[6]. Consecuencia de esto es $\hat{C} = \hat{D}$.

PROPOSICIÓN II: en el CBI anterior si *M* es punto medio de $\overline{AB}$ y *H* es punto medio de $\overline{CD}$, entonces $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{MH} \perp \overline{CD}$.



(Fig. 58)

Demostración: se trazan las diagonales de los cuadriláteros *AMHC* y *MBDH* (Fig. 58).

Por criterio LAL *CAM* y *DBM* son congruentes[7], de donde $\overline{CM} = \overline{DM}$. (1)

Por (1) y criterio LLL son congruentes *CHM* y *DHM*, luego $\angle CHM = \angle DHM$. (2)

De (2) se deduce que esos ángulos son rectos, pues son adyacentes y de igual amplitud. Esto demuestra que $\overline{MH} \perp \overline{CD}$.

Por Proposición I y LAL, *ACH* es congruente con *BDH*, luego $\overline{AH} = \overline{BH}$. (3)

Por (3) y LLL, *AMH* es congruente con *BMH,* entonces $\angle AMH = \angle BMH$. (4)

Finalmente de (4) resulta $\overline{MH} \perp \overline{AB}$.

Hasta aquí no hay demasiada novedad. Se trata de dos teoremas muy simples que giran en torno a comparaciones de triángulos. Respecto del cuadrilátero birrectángulo isósceles, para alguien acostumbrado a la geometría euclidiana es nada más que un simple rectángulo. Pero debe notarse que *no* se ha dicho que los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son rectos (sólo se probó que son congruentes), por lo tanto *no* podemos afirmar que el CBI es un rectángulo, aunque así lo *veamos*.

6 De aquí en adelante para Euclides I.4 pondremos LAL y para I.8 pondremos LLL.

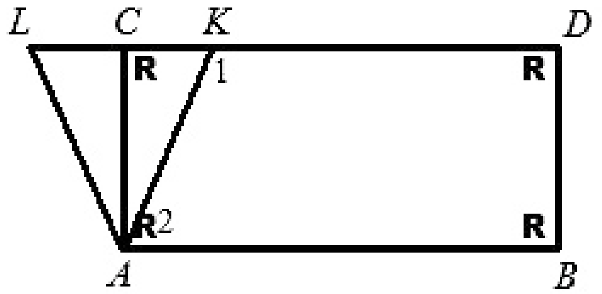
7 En realidad son simétricos con la recta *HM* como eje de simetría. En algunos textos se habla de "congruencia inversa", para lo cual primeramente se define "movimiento inverso" en un plano orientado. No es posible extendernos aquí en este asunto. Véase cap. 14, pág. 252 y también (Puig Adam, 1981: 26).

A partir de la siguiente proposición Saccheri comienza a hacer de las suyas. Se trata en realidad de tres teoremas en uno. Para ir entrenando al lector pondré más figuras que las que hizo el autor.

PROPOSICIÓN III: en el CBI $ABDC$ $\begin{cases} \hat{C} = \hat{D} = 1R \\ \hat{C} = \hat{D} > 1R \\ \hat{C} = \hat{D} < 1R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{CD} = \overline{AB} \\ \overline{CD} < \overline{AB} \\ \overline{CD} > \overline{AB} \end{cases}$

Demostración (1ª. Parte): sea $\hat{C} = \hat{D} = 1$R. Se niega la tesis, asumiendo que $\overline{CD} \neq \overline{AB}$.

Véase la Fig. 59. Si $\overline{CD} > \overline{AB}$, existe K en $\overline{CD}$ tal que $\overline{KD} = \overline{AB}$. Se une A con K y, por lo tanto, $ABDK$ es un CBI con ángulos rectos en B y D y en él, por la Proposición I, $\hat{1} = \hat{2}$. (1)



(Fig. 59)

Obsérvese el triángulo ACK. El ángulo $\hat{1}$ es exterior a él y, por el teorema del ángulo exterior (Euclides I.16), es mayor que el interior opuesto $\hat{C} = 1R$. Por lo tanto $\hat{1}$ es *obtuso.* (2)

En cambio, el ángulo $\hat{2}$ es *agudo* (3), puesto que uno de sus lados está sobre $\overrightarrow{AB}$, mientras que el otro es interior al ángulo recto $\angle CAB$.

Como (2) y (3) contradicen (1), es falso que $\overline{CD} > \overline{AB}$.

Si $\overline{CD} < \overline{AB}$, se prolonga $\overline{CD}$ hasta un punto L tal que $\overline{LD} = \overline{AB}$. En ese caso, uniendo A con L, resulta un nuevo CBI $ABDL$ con $\hat{B} = \hat{D} = 1$R y $\hat{L} = \hat{A}$. Pero se deduce claramente que estos últimos no pueden ser congruentes, ya que:

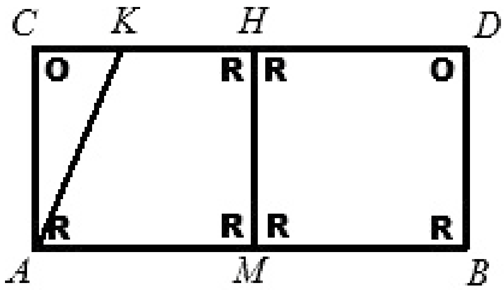
- $\hat{L}$, es decir $\angle CLA$, es *agudo* por ser interno opuesto al ángulo exterior en C del LCA, que vale 1R,

- $\hat{A}$, o sea $\angle BAL$, es *obtuso* (¿por qué?).

Esta última inconsistencia provino de suponer $\overline{CD} < \overline{AB}$. Queda así demostrado que $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Demostración (2ª. Parte): Sea $\hat{C} = \hat{D} > 1$R. Se traza $\overline{HM}$ como en la Proposición II. (Usaremos una O "gordita" para los ángulos obtusos).

Véase la Fig. 60. También aquí se procede indirectamente. Si $\overline{CD} = \overline{AB}$ entonces $\overline{CH} = \overline{AM}$, por ser M y H puntos medios. Ahora tenemos el CBI $AMHC$ con ángulos rectos en M y H. Por Proposición I se tiene en él $\hat{A} = \hat{C}$. Esto es falso ya que por hipótesis uno es recto y el otro obtuso. Luego no es posible que $\overline{CD} = \overline{AB}$.

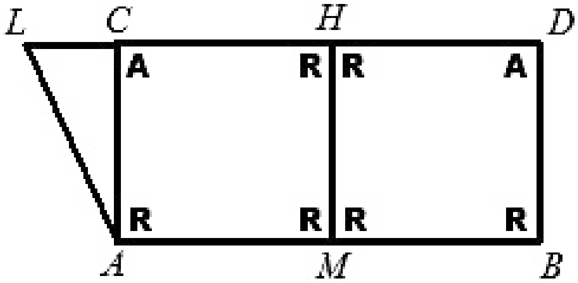


(Fig. 60)

Ahora suponemos que $\overline{CD} > \overline{AB}$, de donde $\overline{CH} > \overline{AM}$. Tomamos un punto *K* tal que $\overline{KH} = \overline{AM}$. Se forma así, uniendo *A* y *K*, el CBI *AMHK* en el cual, por Proposición I, es ∠*MAK* = ∠*HKA*. Fácilmente puede demostrarse que esto es un absurdo, al ser uno agudo y el otro obtuso.

Queda probado que si $\hat{C} = \hat{D} > 1\text{R}$ entonces $\overline{CH} < \overline{AM}$ y, por lo tanto, tomando los dobles de esos segmentos, resulta $\overline{CD} < \overline{AB}$.

Demostración (3ª. Parte): Sea $\hat{C} = \hat{D} < 1\text{R}$. La demostración es análoga a la de la 2ª. Parte. Incluyo la Fig. 61 para que el lector demuestre esta parte del teorema. (Los ángulos agudos fueron señalados con una A de trazo grueso)[8].



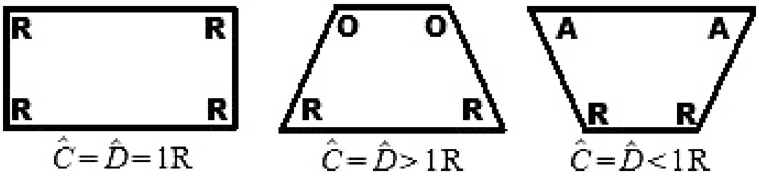
(Fig. 61)

Es un poco arduo hacerse una idea de unos cuadriláteros como los de las partes segunda y tercera del teorema. ¿Cómo se ven *realmente*? El de la parte primera, en cambio, es nuestro cotidiano rectángulo y no se nos generan inconvenientes mentales para pensar en él.

Es posible en ocasiones ayudarse con dibujos, como en la Fig. 62, que nos hacen dar "idea" de los novedosos cuadriláteros de las partes 2 y 3. Téngase presente, sin embargo, que aquellos están confeccionados sobre un plano euclidiano (el plano del papel), y en él solo "funcionan" los dibujos que respetan los axiomas de la geometría euclidiana[9]. En otras palabras, nos resulta imposible trazar en el papel un CBI con dos ángulos agudos u obtusos.

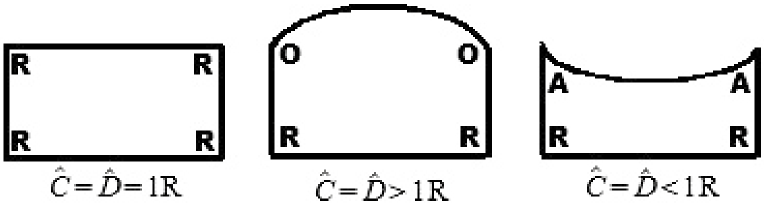
8 A diferencia de la segunda parte, el punto *L* debe tomarse en la prolongación de $\overline{DC}$.

9 Suponemos que el plano del dibujo es euclidiano, porque hemos crecido con la geometría de Euclides. Luego se hara una breve referencia al interrogante físico-filosófico sobre cuál es la geometría del espacio físico donde vivimos.



(Fig. 62) Los tres CBI de la Proposición III (versión 1).

Por simplicidad he omitido las letras de los vértices. Resulta chocante, pero inevitable por lo ya dicho, que veamos señalados como rectos ángulos que se ven agudos u obtusos. Una alternativa para evitar esto es la siguiente (Fig. 63).

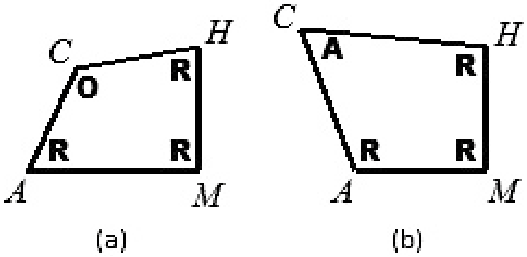


(Fig. 63) Los tres CBI de la Proposición III (versión 2).

En esta versión de los cuadriláteros se respetan los ángulos rectos y los no rectos se dibujan más acordes, pero curvando un lado. Es decir que si se quiere conservar rectos los segmentos, se perjudican los ángulos; y si se cuidan los ángulos, se perjudican los segmentos. ¡Todo no se puede!

Un corolario[10] de esta Proposición es el siguiente: en un cuadrilátero trirrectángulo cada uno de los lados adyacentes al ángulo no recto es menor o mayor que el lado opuesto, según que dicho ángulo sea obtuso o agudo, respectivamente.

Esto se demostró para $\overline{CH}$ en relación con $\overline{AM}$ en la segunda y tercera partes del teorema. Es posible también probarlo para $\overline{AC}$ en relación con $\overline{HM}$. Para este corolario, la Fig. 64 nos ayuda a "ver"[11].



(Fig. 64)

En (a) $\overline{CH} < \overline{AM}, \overline{AC} < \overline{HM}$; en (b) $\overline{CH} > \overline{AM}, \overline{AC} > \overline{HM}$.

10 O sea una proposición que se deduce inmediatamente de lo anterior. Es interesante la etimología, ya que proviene del latín *corolla* = coronilla.

11 Conviene igualmente independizarse de las figuras, afirmándose en los conceptos antes que en la representación gráfica, la cual no siempre es posible de realizar.

PROPOSICIÓN IV: en el CBI *ABDC,* $\begin{cases} \overline{CD} = \overline{AB} \\ \overline{CD} < \overline{AB} \\ \overline{CD} > \overline{AB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = \hat{D} = 1\text{R} \\ \hat{C} = \hat{D} > 1\text{R} \\ \hat{C} = \hat{D} < 1\text{R} \end{cases}$

Esta proposición es la recíproca de la III.

Demostración: supóngase que $\overline{CD} = \overline{AB}$. No puede ser $\hat{C} = \hat{D} > 1\text{R}$, porque entonces $\overline{CD} < \overline{AB}$, por Proposición III, y esto contradice la suposición inicial.

Tampoco puede ser $\hat{C} = \hat{D} < 1\text{R}$, porque de ello resulta $\overline{CD} > \overline{AB}$. Así queda demostrada la primera parte, y $\hat{C} = \hat{D} = 1\text{R}$.

De manera similar se demuestran las otras dos partes.

Las tres hipótesis

Luego de estos teoremas, leemos en el *Euclides... vindicatus...*:

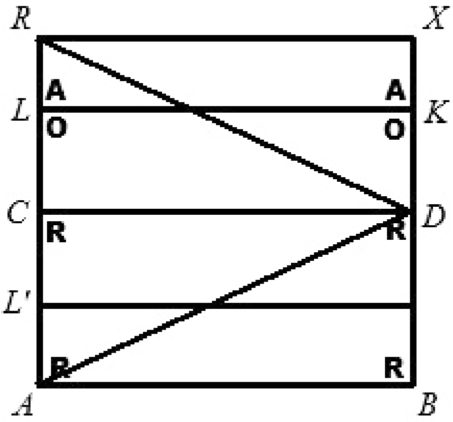
> Definición: (...) pueden distinguirse tres hipótesis sobre la naturaleza de estos ángulos [se refiere a $\hat{C}$ y $\hat{D}$ del CBI]; que llamaremos *hipótesis del ángulo recto, hipótesis del ángulo obtuso, hipótesis del ángulo agudo* (Saccheri, 1908: 7).

Nosotros las indicaremos con las siglas HAR, HAO, HAA, respectivamente.

En relación con las nociones de axiomática que vimos en el Capítulo 5, analicemos el alcance de lo anterior: Saccheri en este punto *postula*, es decir, propone aceptar sin demostración, que los ángulos en los vértices *C* y *D* del CBI son rectos, obtusos o agudos. ¿Podrán convivir estas posibilidades o serán mutuamente excluyentes? Es decir, ¿puede haber un CBI con los ángulos rectos en *C* y *D*, y otro que los tenga agudos, por ejemplo? Saccheri nos sorprende ahora con unos elegantes e ingeniosos teoremas al respecto.

PROPOSICIÓN V: si en un solo caso es verdadera la hipótesis del ángulo recto, entonces es cierta en cualquier otro caso.

Demostración: consideremos un CBI *ABDC* (Fig. 65) donde es válida la HAR, o sea que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 1\text{R}$ y $\overline{AB} = \overline{CD}$ (Proposición III).



(Fig. 65)

Se prolonga $\overline{AC}$ hasta *R* y $\overline{BD}$ hasta *X*, tal que $\overline{CR} = \overline{AC}$ y $\overline{DX} = \overline{BD}$. Se traza $\overline{RX}$. Los triángulos *ACD* y *RCD* son congruentes por LAL; entonces $\overline{AD} = \overline{RD}$ y $\angle ADC = \angle RDC$. De aquí $\angle ADB = \angle RDX$ por tener complementos iguales, y por LAL resultan congruentes los triángulos *ABD* y *RXD*.

Luego, en el *ABXR* $\hat{X}$ es recto y también lo es $\hat{R}$, ya que los ángulos que sumados forman $\hat{A}$ son respectivamente congruentes con los que forman $\hat{R}$. Y dado que construimos $\overline{AR} = \overline{BX}$, el *ABXR* es un CBI en el que se verifica la HAR.

Saccheri ha demostrado hasta aquí que haciendo la construcción descripta siempre se obtiene un CBI donde se mantiene válida la HAR. Sigamos.

Consideremos ahora algún punto de $\overline{CR}$, digamos *L*, y tomemos sobre $\overline{DX}$ un punto *K* tal que $\overline{CL} = \overline{DK}$. Se traza $\overline{LK}$. ¿Valdrá también la HAR en los nuevos CBI *ABKL* y *KXRL*?

Veamos el *ABKL*. Si sus ángulos en *K* y *L* (congruentes por Proposición I) son *rectos,* queda cumplida la HAR. Si no lo son, supongamos que son *obtusos.* Sus adyacentes son, en consecuencia, *agudos*. Entonces se tiene:

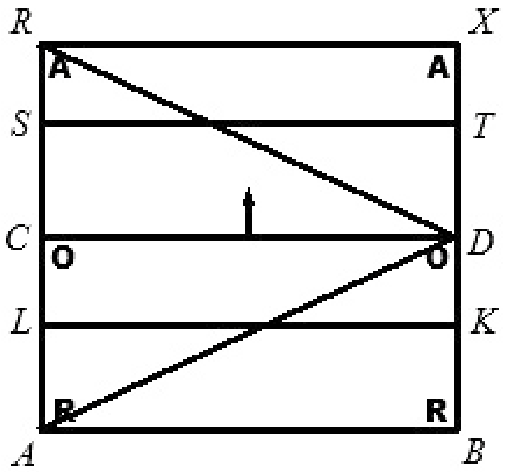
- en el *ABKL*, si $\hat{L} = \hat{K} > 1\text{R} \Rightarrow \overline{LK} < \overline{AB}$, por Proposición III, (1)

- en el *KXRL*, si $\hat{L} = \hat{K} < 1\text{R} \Rightarrow \overline{LK} > \overline{RX}$, por Proposición III. (2)

De (1) y (2) resulta que $\overline{RX} < \overline{LK} < \overline{AB}$, lo cual es imposible. En efecto, en la parte inicial del teorema se demostró que $\overline{AB} = \overline{RX}$.

De manera totalmente análoga se llega a contradicción invirtiendo el carácter de obtusos y agudos de los ángulos en *L* y *K* de *ABKL* y *KXRL*, y haciendo un análisis parecido para un segmento como el $\overline{L'K'}$ de la Fig. 65. Por otra parte, si se toma $\overline{BX}$ como base del CBI *ABXR*, mientras se prolongan o reducen los lados $\overline{AB}$ y $\overline{RX}$, se demuestra también (no lo haremos aquí) que la HAR se conserva válida.

PROPOSICIÓN VI: si en un solo caso es verdadera la hipótesis del ángulo obtuso, entonces es cierta en cualquier otro caso.



(Fig. 66)

Demostración: sea un CBI *ABDC* (Fig. 66) donde es válida la HAO, o sea que $\hat{A} = \hat{B} = 1\text{R}$, $\hat{C} = \hat{D} > 1\text{R}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$ (Proposición III).

Con igual construcción que en la Proposición V, se prolonga $\overline{AC}$ hasta *R* y $\overline{BD}$ hasta *X*, con $\overline{CR} = \overline{AC}$ y $\overline{DX} = \overline{BD}$, y se traza $\overline{RX}$. Se prueba igualmente que $\hat{X} = \hat{R}$.

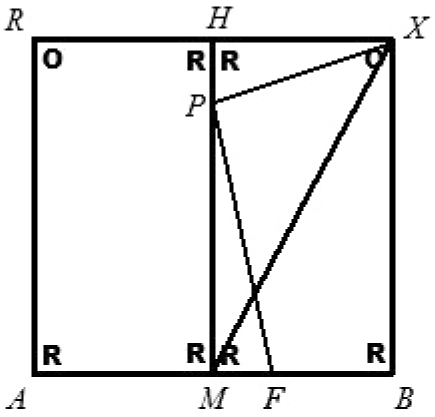
Si en el CBI *ABXR* los ángulos en *X* y *R* son *obtusos,* el teorema queda probado. Si son *rectos,* tenemos un caso en que se verifica la HAR y por Proposición V se contradice la hipótesis. Así que hay que analizar qué pasa si $\hat{X}$ y $\hat{R}$ son *agudos*.

En tal caso es $\overline{RX} > \overline{AB}$, por Proposición III, y como por hipótesis $\overline{AB} > \overline{CD}$, resulta $\overline{RX} > \overline{AB} > \overline{CD}$. Si se traslada $\overline{CD}$ hacia $\overline{RX}$ con movimiento continuo (indicado por la flecha en la figura)[12], existe una posición intermedia $\overline{ST}$ para la cual es $\overline{ST} = \overline{AB}$ En esa situación el *ABTS* es un CBI con los ángulos en *S* y *T* rectos, por Proposición IV. Luego en él se cumple la HAR y, por Proposición V, queda contradicha la hipótesis. Entonces debe ser $\hat{X} = \hat{R} > 1\text{R}$.

Puede demostrarse también que tomando $\overline{LK}$ como en la figura, etcétera, los ángulos en *L* y *K* son necesariamente obtusos.

El teorema prosigue con una parte interesante que veremos ahora. Saccheri demuestra que la HAO subsiste incluso tomando como base cualquier lado del CBI *ABXR*. Para más claridad refirámonos a la Fig. 67. Se ha demostrado que en ese CBI vale la HAO, o sea $\hat{R} = \hat{X} > 1\text{R}$.

12 El recurso del "movimiento continuo" que usa Saccheri podría sustituirse por una argumentación basada en la continuidad del plano y en la existencia necesaria de un segmento $\overline{ST} = \overline{AB}$, cuya longitud (un número real) está comprendida entre las de $\overline{CD}$ y $\overline{RX}$.



(Fig. 67)

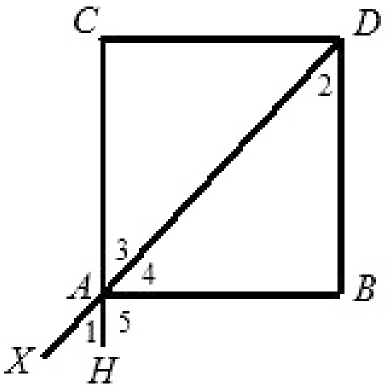
Se construye como en la Proposición II el $\overline{HM}$. Luego se trazan el $\angle BXP$ *recto* (¡aunque en la figura no se *vea* así!) y $\overline{XM}$. El punto P donde $\overrightarrow{XP}$ corta a $\overline{HM}$ queda situado entre H y M pues $\angle BXH$ es obtuso y $\angle BXM$, agudo[13].

Ahora, en el cuadrilátero *BXPM*, tenemos tres ángulos rectos (en *X*, *B* y *M*) y uno obtuso en *P* (por ser ángulo exterior del triángulo *PHX*, rectángulo en *H*). Y por el corolario de la Proposición III (véase la Fig. 64 a) es $\overline{XP} < \overline{BM}$. Luego, existe *F* en $\overline{BM}$ tal que $\overline{FB} = \overline{XP}$, y *BXPF* resulta ser un CBI. Su ángulo en *F* es obtuso por ser exterior del triángulo *PMF* rectángulo en *M*. Esto significa que sobre cualquier base subsiste la hipótesis del ángulo obtuso y el teorema queda demostrado completamente.

PROPOSICIÓN VII: si en un solo caso es verdadera la hipótesis del ángulo agudo, entonces es cierta en cualquier otro caso.

La demostración es inmediata si se usan las dos proposiciones anteriores.

PROPOSICIÓN VIII: sea el triángulo *ABD* rectángulo en *B* (Fig. 68); se prolonga la hipotenusa $\overline{DA}$ hasta *X* y por *A* se traza $\overline{HA} \perp \overline{AB}$, siendo *H* interior al $\angle XAB$. Entonces es $\angle XAH$ (=, <, >) $\angle ADB$, según sea verdadera la (HAR, HAO, HAA), y recíprocamente.



(Fig. 68)

13 Esto asegura que $\overrightarrow{XP}$ es interior al $\angle HXM$ y, dado que $\overline{HM}$ tiene sus extremos en los lados de ese ángulo, $\overrightarrow{XP}$ lo corta necesariamente.

Demostración: Por simplicidad hemos numerado los ángulos. Sobre *HA* se ubica *C* tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$, y se traza el segmento que une *C* y *D*. Queda determinado el CBI *ABDC* con ángulos rectos en *A* y *B*.

Si es válida la HAR resulta $\overline{AB} = \overline{CD}$ (Proposición III), y por criterio LLL son congruentes los triángulos *ACD* y *ABD*. De esto surge que $\hat{2} = \hat{3}$ y como $\hat{3} = \hat{1}$ por ser opuestos por el vértice, resulta $\hat{1} = \hat{2}$, esto es $\angle XAH = \angle ADB$.

Si es cierta la HAO se tiene que $\overline{AB} > \overline{CD}$. Ahora, por Proposición I.25 de Euclides aplicada a los mismos triángulos de la parte anterior, resulta $\hat{2} > \hat{3} = \hat{1}$.

Similar demostración se lleva a cabo si es verdadera la HAA, tomando los signos de desigualdad contrarios.

Saccheri sigue con la demostración de los recíprocos de cada parte, considerando para la HAR que $\hat{1} = \hat{2}$ y deduciendo de esto $\overline{AB} = \overline{CD}$. En las otras dos hipótesis utiliza la Proposición I.24 de *Elementos*.

Ahora empiezan a surgir otras sorpresas que inmediatamente se pelean con el sentido común.

PROPOSICIÓN IX: en todo triángulo rectángulo la suma de los ángulos agudos[14] es igual, mayor o menor que un ángulo recto, según sea verdadera la HAR, la HAO o la HAA.

Demostración: Usamos la misma Fig. 68, en la que consideramos el triángulo rectángulo *ABD*.

En la HAR es $\hat{1} = \hat{2}$ (1) por el teorema anterior. Como $\hat{1} + \hat{5} + \hat{4} = 2R$, por formar un ángulo llano, y siendo $\hat{5} = 1R$, resulta $\hat{1} + \hat{4} = 1R$. Entonces por (1) se obtiene $\hat{2} + \hat{4} = 1R$.

En la HAO es $\hat{2} > \hat{1}$ (2) por el teorema anterior. Sigue valiendo $\hat{1} + \hat{4} = 1R$ y, aplicando (2), se deduce que $\hat{2} + \hat{4} > 1R$. En la HAA se procede igual con las adaptaciones convenientes de signos.

De esta Proposición se desprenden dos consecuencias inmediatas:

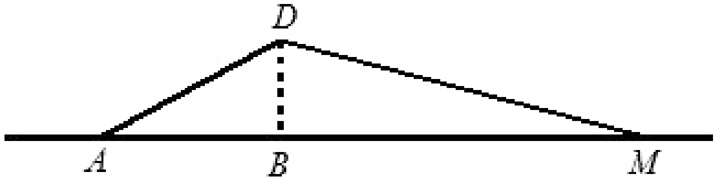
a) la S_i del triángulo rectángulo es igual (o mayor, o menor) a 2R en la HAR (o HAO, o HAA), y

b) dado que cualquier triángulo puede particionarse en triángulos rectángulos, se prueba fácilmente que la S_i de *cualquier* triángulo cumple iguales propiedades.

14 En un triángulo rectángulo los ángulos distintos del recto son necesariamente agudos, por Euclides I.16.

Perpendiculares y oblicuas

PROPOSICIÓN X: de dos segmentos oblicuos trazados desde un punto exterior a una recta, el mayor tiene proyección mayor, y recíprocamente.

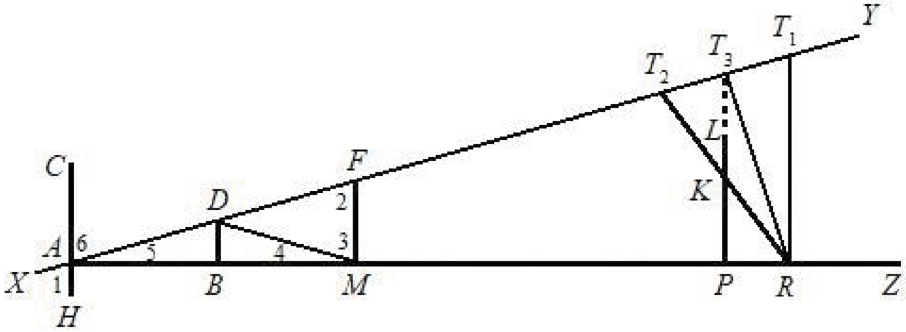


(Fig. 69)

Por lo tanto (Fig. 69) si $\overline{DM} > \overline{DA}$, entonces $\overline{BM} > \overline{BA}$, y recíprocamente. No incluyo la demostración para no extenderme demasiado y porque no reviste mayor interés en este desarrollo.

Ahora a prepararse, porque viene un lindo teorema. En principio, a quien está acostumbrado al "mundo euclidiano", le resultará llamativo por qué demostrar algo que parece tan obvio. No obstante esto, la sutil mente de nuestro matemático desconfía, deduce y prueba[15].

PROPOSICIÓN XI: en la HAR una perpendicular y una oblicua a una misma recta siempre se cortan.



(Fig. 70)

Demostración: Consideremos una recta *AZ*, una perpendicular a ella, *PL*, y una oblicua a ella, *AY* (Fig. 70)[16].

Si se observa bien el sector izquierdo de la figura, se verá que el formato es el de la Proposición VIII, con los puntos *X*, *H*, *A*, la perpendicular *HA*, etcétera, por lo que no detallaremos el trazado de esos elementos.

Sobre la oblicua *AY* se trazan los segmentos congruentes $\overline{AD}$ y $\overline{DF}$. También se dibujan las perpendiculares a *AZ* por *D* y *F*, quedando determinados $\overline{DB}$ y $\overline{FM}$. Se construye $\overline{DM}$.

15 Nuestro afecto por Saccheri nos pone en riesgo de ser poco objetivos. Para ser justos diremos que él casi seguramente tomó lo esencial de esta demostración del matemático árabe Nasir al-Din al-Tusi, ya mencionado en cap. 7, pág. 123, si bien este se limitó solo al caso de la HAR y Saccheri fue más allá. Véase Bonola (1945: 50).

16 Saccheri aclara en su demostración que la oblicua forma un ángulo agudo con *AZ*. Él afirma que se deben encontrar si la suma de los ángulos (el *YAZ* y el *APL*) es menor a 2R.

Primera parte: demostraremos que $\overline{DM} = \overline{DA}$. (*)

Si $\overline{DM} > \overline{DF}$ entonces $\hat{2} > \hat{3}$, dado que en un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo (Euclides I.18). Recuérdese que estamos en la HAR, por lo tanto $\hat{2} = \hat{1}$ (Proposición VIII), y como $\hat{1} = \hat{6}$, luego $\hat{6} > \hat{3}$. (1)

La desigualdad (1) implica $\hat{5} < \hat{4}$ (2) pues estos ángulos son complementos respectivos de $\hat{6}$ y $\hat{3}$.

De (2) se deduce en el triángulo *ADM* y, nuevamente por Euclides I.18, que $\overline{DM} < \overline{AD} = \overline{DF}$, lo que contradice nuestra suposición inicial (*).

Con análoga demostración por el absurdo resulta imposible $\overline{DM} < \overline{AD} = \overline{DF}$. Obligadamente, entonces, se tiene $\overline{DM} = \overline{DA}$. De esto y de la Proposición X se desprende que son congruentes las proyecciones $\overline{AB}$ y $\overline{BM}$.

De hecho, con el razonamiento anterior extendido a más segmentos queda establecido que *en la HAR las proyecciones de segmentos congruentes son congruentes*[17].

Segunda parte: sobre la oblicua tomamos un segmento $\overline{AT} = n.\overline{AD}$ ($n \in$ N), es decir, múltiplo de $\overline{AD}$, tal que su proyección $\overline{AR}$ sea mayor que $\overline{AP}$. En la Fig. 70 no pusimos *T*, siga leyendo...[18]

En la figura se marcó *T* en tres posiciones (no simultáneas) posibles, T_1, T_2 y T_3. Dado que *R* es la proyección de *T* sobre *AZ*, se tiene que $\angle ART_1$ = 1R, $\angle ART_2$ = 1R, $\angle ART_3$ = 1R (aunque no se "vea" que $\angle ART_2$ y $\angle ART_3$ son rectos).

Ahora bien, resulta que la única ubicación posible para *T* es T_1, *en el semiplano de borde PL que no contiene a A*. En efecto:

- *T* no podría ubicarse antes de T_3, como en T_2, porque al estar T_2 y *R* en semiplanos distintos respecto de *PL*, $\overline{RT_2}$ cortaría a *PL* en un punto *K*, quedando determinado un triángulo *PRK* con dos ángulos rectos, lo que es contrario a Euclides I.17[19].

- *T* no podría caer en *PL* (posición T_3) ya que se produciría igual contradicción en el triángulo PRT_3.

Al ser, entonces, T_1 la única posición posible para *T*, razonamos así: en el triángulo ART_1, *PL* corta a $\overline{AR}$ en *P* y *no puede cortar a* $\overline{RT_1}$ por lo dicho en nuestro reciente análisis; entonces debe intersectar necesariamente a $\overline{AT_1}$, esto es, a la oblicua *AY*. Queda así demostrado el teorema.

PROPOSICIÓN XII: en la HAO una perpendicular y una oblicua a una misma recta siempre se cortan.

17 Lo he puesto muy simple. En rigor los segmentos proyectados son congruentes entre sí y las rectas donde se ubican respectivamente ellos y sus proyecciones se consideran fijas, para poder comparar estas últimas. Es sabido que dos segmentos congruentes pueden tener proyecciones diferentes si forman ángulos distintos con la recta sobre la que son proyectados.

18 Es posible la existencia de $\overline{AT}$ por el axioma de Eudoxo-Arquímedes (véase cap. 6, pág. 104).

19 También habría aquí *dos* perpendiculares a una recta (*AZ*) por un punto (*K*), lo que no puede ser porque por ese camino vuelve a contradecirse Euclides I.17.

Demostración:

Primera parte: se probará que $\overline{DM} > \overline{DA}$ (seguimos en la Fig. 70).

Si $\overline{DM} = \overline{DA} = \overline{DF}$ los triángulos *ADM* y *DFM* son isósceles, luego $\hat{5} = \hat{4}$ (1) y $\hat{2} = \hat{3}$ (2) (Euclides I.5).

También se tiene que $\hat{1} = \hat{6} < \hat{2}$ (Proposición VIII). Luego, de (2): $\hat{6} < \hat{3}$ y de esto se deduce $\hat{5} > \hat{4}$ (Euclides I.18) imposible pues contradice (1). Esto provino de suponer $\overline{DM} = \overline{DA}$.

Si $\overline{DM} < \overline{DA} = \overline{DF}$, (3) resulta $\hat{2} < \hat{3}$ y como $\hat{1} = \hat{6} < \hat{2}$, esto nos lleva a la siguiente linda cadena deductiva: $\hat{1} < \hat{3} \Rightarrow \hat{6} < \hat{3} \Rightarrow \hat{5} > \hat{4} \Rightarrow \overline{DM} > \overline{DA}$, lo que contradice (3).

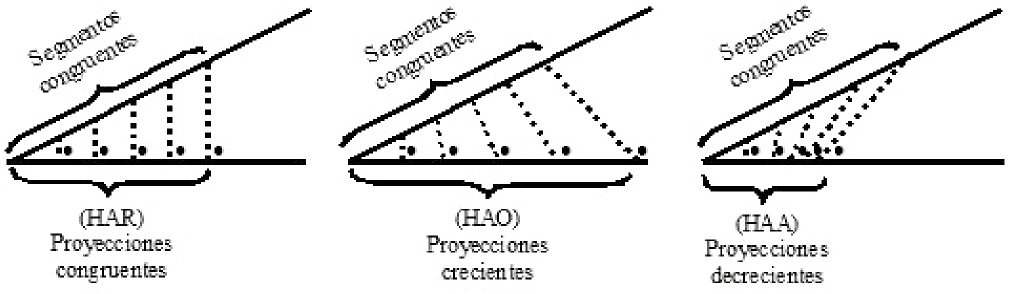
La argumentación expuesta demuestra, entonces, que $\overline{DM} > \overline{DA}$.

Una consecuencia de esto, recurriendo a la Proposición X, es que $\overline{BM} > \overline{AB}$. Si extendemos la idea a más segmentos, resulta que en la HAO *las proyecciones de segmentos congruentes son de longitud creciente.*

Segunda parte: el teorema se concluye con igual razonamiento que el anterior, en relación con el punto *T* y su proyección *R* sobre *AZ*. Queda demostrado así que la perpendicular *PL* y la oblicua *AY* a *AZ* siempre se cortan[20].

Aunque Saccheri no dedica una Proposición del mismo tipo a la HAA, puede demostrarse fácilmente que en esta hipótesis *las proyecciones de segmentos congruentes son de longitud decreciente.*

Los esquemas siguientes (Fig. 71) nos ayudan a "ver" los resultados obtenidos en cada hipótesis. Los segmentos sobre la oblicua son congruentes y los ángulos marcados con puntos son rectos.



(Fig. 71)

Naturalmente, nada garantiza que en la HAA vayan a encontrarse una perpendicular y una oblicua a una misma recta.

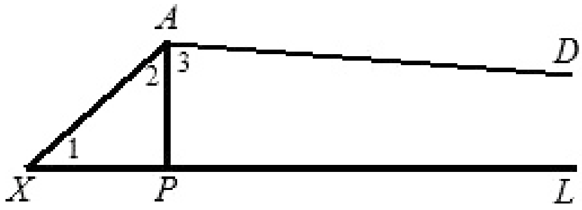
Dejemos esto aquí por ahora y sigamos con la mayor atención otras proposiciones. Sin ir más lejos, ya en la XIII el jesuita alcanza uno de sus objetivos: destruir la HAO.

20 ¡Increíblemente en la HAO las rectas *AY* y *PL* se cortan incluso aunque *AY también* sea perpendicular a *AZ*! Al incursionar en la geometría elíptica veremos algún detalle sobre esto en cap. 12, pág. 235.

Se cumple parte del plan (o, al menos, eso parece)

A ver si nuestro paciente y esforzado lector se sorprende un poco más:

PROPOSICIÓN XIII: en la HAR y en la HAO el Postulado V de Euclides es verdadero.



(Fig. 72)

Demostración: considérense las rectas *AD* y *XL* cortadas por *AX* de manera que los ángulos $\angle AXL = \hat{1}$ y $\angle XAD = \hat{2} + \hat{3}$ suman menos de 2R (Fig. 72). Uno de ambos es necesariamente agudo, digamos el $\angle AXL$. Entonces por *A* podemos trazar la recta perpendicular a *XL* que corta a esta en *P*.

Al situarnos en la HAR y en la HAO se tiene, en el triángulo rectángulo *APX*, $\hat{1} + \hat{2} \geqslant 1R$ (Proposición IX) (1). Y, por hipótesis, $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} < 2R$ (2). De (1) y (2) resulta que $\hat{3} < 1R$.

Resulta por lo tanto que, en relación con la recta *AP*, *PL* es perpendicular y *AD* es oblicua, y se cortan entre sí, pues en la HAO y en la HAR rectas como estas siempre se encuentran.

¡El postulado V resulta válido en ambas hipótesis, ya que se lo ha podido demostrar! Sin embargo, teniendo en cuenta lo visto en cap. 5, pp. 78 y 81, lo que se ha probado es un *teorema* cuyo enunciado coincide con el del Postulado V y que no es tal en esta organización de la geometría dada por Saccheri.

Si nombramos P. I, …, P. IV a los cuatro primeros postulados euclidianos, lo que acaba de suceder en la Proposición XIII vista es que

{P. I, P. II, P. III, P. IV, HAR} $\Rightarrow$ P. V

y

{P. I, P. II, P. III, P. IV, HAO} $\Rightarrow$ P. V.

Pero las hipótesis adoptadas por Saccheri allá en el inicio de su aventura, son *mutuamente excluyentes*, lo que significa, entre otras cosas, que

{P. I, P. II, P. III, P. IV, HAO} $\Rightarrow \neg$HAR.

Como en la HAO se llega a demostrar una proposición (P. V) y la negación de su equivalente (HAR), ella resulta inconsistente y queda refutada. Con la Proposición XIII Saccheri logra destruir uno de los supuestos contrarios a la que él desea mantener (por ser más "natural"): la HAR.

En la HAA no puede demostrarse la Proposición XIII. En efecto, al ser en el *APX* la suma de los ángulos agudos *menor* que 1R, no hay certeza de que $\hat{3}$ sea agudo.

Luego de esta Proposición, sigue la XIV, cuyo enunciado es:

"la hipótesis del ángulo obtuso es falsa porque se destruye a sí misma". Aquí Saccheri argumenta diciendo que una consecuencia de la HAR es el Postulado V (Proposición XIII) y que en él se basó Euclides para demostrar varios teoremas, entre otros, el de la suma de ángulos interiores de los triángulos (S_i = 2R). Pero por otra parte, de la HAO se dedujo antes (Proposición IX) que esta suma es mayor que dos rectos, por lo tanto, no hay lugar para la HAO en la geometría pues ella encierra una contradicción[21].

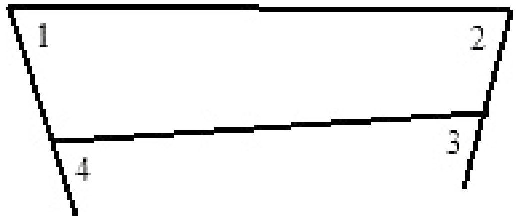
Otras dos proposiciones, sin que incluyamos sus respectivas demostraciones, son:

PROPOSICIÓN XV: de la existencia de un triángulo en el que la suma de ángulos sea igual, mayor o menor, de dos rectos, se deduce que se satisface respectivamente la HAR, la HAO o la HAA.

Corolario: un ángulo exterior de un triángulo es igual, menor o mayor, que la suma de los internos opuestos, según se satisfaga la HAR, la HAO o la HAA.

PROPOSICIÓN XVI: de la existencia de un cuadrilátero en el que la suma de ángulos sea igual, mayor o menor, de cuatro rectos, se deduce que se satisface respectivamente la HAR, la HAO o la HAA.

Corolario (que aplicaremos en la Proposición XXIV): prolongando dos lados opuestos de un cuadrilátero (Fig. 73), la suma de los ángulos externos, $(\hat{3} + \hat{4})$, es igual, menor o mayor, que la de los internos opuestos, $(\hat{1} + \hat{2})$, según sea cierta la HAR, la HAO o la HAA.



(Fig. 73)

Perpendiculares y oblicuas en la HAA

Se demostró en las Proposiciones XI y XII que perpendiculares y oblicuas a una misma recta se encuentran *siempre* si nos mantenemos en la HAR o la HAO. En cambio en la HAA, siguiendo a Saccheri, nos topamos con esto:

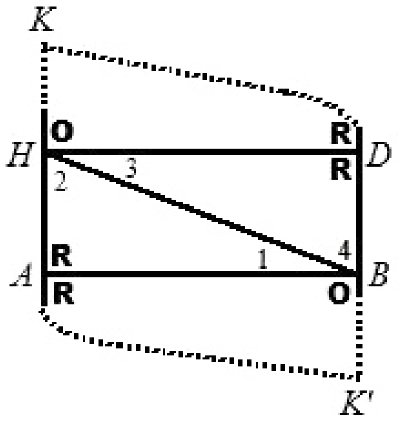
PROPOSICIÓN XVII: en la HAA es posible hallar una perpendicular y una oblicua a una misma recta que no se cortan.

Saccheri nos presenta dos situaciones geométricas en las que lo afirmado resulta totalmente cierto. Vamos a verlas.

21 En la misma Proposición XIV el autor da otro argumento basado en la contradicción de Euclides I.17. Véase Saccheri (1908: 27).

Demostración:

Primera situación. Partimos de un triángulo *HAB* rectángulo en *A* (Fig. 74). $\hat{1}$ y $\hat{2}$ son sus ángulos agudos.



(Fig. 74)

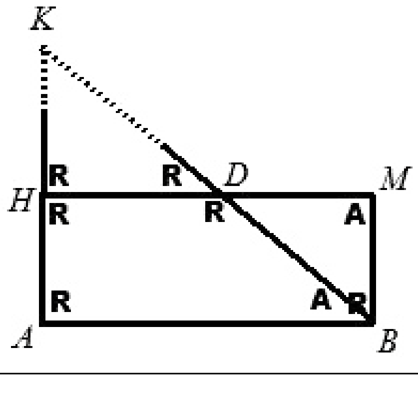
Sobre el lado $\overline{HB}$ y con vértice en *H* se construye $\hat{3} = \hat{1}$. Se trazan también $\overline{HD} = \overline{AB}$ y $\overline{DB}$. Los triángulos *BAH* y *BDH* resultan congruentes por LAL, por lo tanto *BDH* tiene un ángulo recto en *D*.

Una consecuencia de esto es que $\hat{1} + \hat{4} = \hat{3} + \hat{2}$, o sea ∠*AHD* = ∠*ABD*, y estos ángulos son *agudos*, como se puede fácilmente deducir aplicando la Proposición IX para la HAA. Los adyacentes de los ángulos mencionados son, por ende, *obtusos* (los indicamos con O gruesa). La R gruesa corresponde a los ángulos rectos.

Si miramos ahora a la recta *AB* vemos que *AH* y *BD* son perpendicular y oblicua a ella, respectivamente, y no pueden cortarse en *K* ni en *K'* pues en ambos casos se formarían los triángulos *HDK* y *ABK'*, que transgreden a Euclides I.17.

Idéntico razonamiento podemos aplicar a la recta *HD* con *DB* y *HA* perpendicular y oblicua a ella, respectivamente.

Segunda situación. El otro caso que presenta Saccheri comienza con la consideración de un cuadrilátero trirrectángulo *ABMH*, con el ángulo agudo en *M* (Fig. 75).



(Fig. 75)

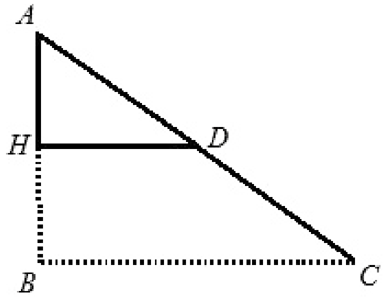
Si unimos un punto cualquiera *D* del lado $\overline{HM}$ con *B* queda determinado un triángulo *BMD* cuyo ángulo exterior ∠*BDH* es *mayor* que el ángulo agudo en *M*. Es posible, por lo tanto, escoger *D* de manera que dicho ángulo externo sea *recto* (situación señalada en la figura). Pero ∠*ABD* es agudo. En relación con la recta *AB* tenemos, entonces, *AH* y *BD*, perpendicular y oblicua a ella, respectivamente, que *no pueden cortarse* en, digamos, un punto *K*, porque el triángulo *KHD* contradice a Euclides I.17.

Toda una inesperada novedad: oblicuas y perpendiculares *no siempre se encuentran* en la geometría que se deriva de la sorprendente HAA.

PROPOSICIÓN XVIII (sin demostración)[22]: según que un ángulo inscrito en un semicírculo sea recto, obtuso o agudo, se deduce que es verdadera la HAR, la HAO o la HAA.

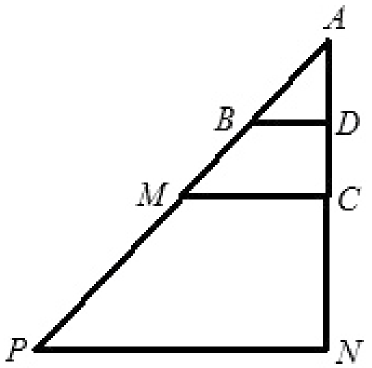
PROPOSICIÓN XIX (sin demostración): si se prolonga la hipotenusa de un triángulo rectángulo en una cantidad igual a su longitud, y se proyecta esa prolongación sobre la prolongación del cateto no adyacente, será cierta la HAR, HAO, HAA, según que la proyección sea igual, mayor o menor que el cateto, respectivamente.

La Fig. 76 aclara el enunciado. *AHD* es el triángulo rectángulo; $\overline{AD}$ es su hipotenusa y $\overline{DC} = \overline{AD}$ es la prolongación. Esta se proyecta sobre la prolongación $\overrightarrow{HB}$ del cateto $\overline{AH}$. Si $\overline{HB} = \overline{AH}$ será válida HAR, etc. En la demostración el autor hace uso de la Proposición XVIII.



(Fig. 76)

PROPOSICIÓN XX (sin demostración): en la HAA si *B* es el punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo *MCA* y si $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, es $\overline{BD}$ no mayor que la mitad de $\overline{MC}$ (Fig. 77).



(Fig. 77)

22 Para las demostraciones de XVIII, XIX y XX véase Saccheri (1908: 36-40). Aunque son interesantes, no las incluyo para no extender demasiado el texto.

Este teorema, trasladado a la HAR, es el conocido "teorema de la base media de un triángulo", el cual establece que $\overline{BD} = \overline{MC}/2$. Asimismo, en la HAO se tendría $\overline{BD} > \overline{MC}/2$. Es llamativo que Saccheri no prueba que en la HAA es, directamente, $\overline{BD} < \overline{MC}/2$.

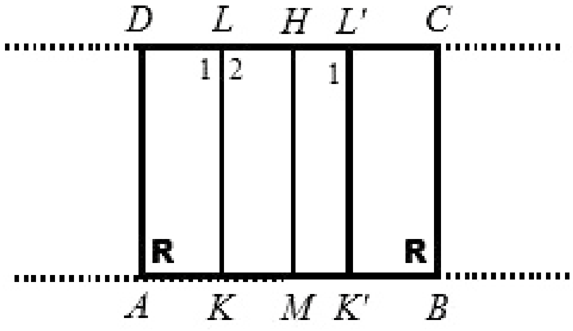
PROPOSICIÓN XXI: en la HAR y en la HAA, la distancia desde un punto de un lado de un ángulo, al otro lado, crece indefinidamente al alejarse dicho punto del vértice del ángulo[23].

Demostración: la argumentación se basa en el teorema anterior. Consideramos el ángulo $\angle MAC$ de la Fig. 77. Sobre su lado $\overrightarrow{AM}$ se toma un punto P tal que $\overline{AP} = 2\overline{AM}$, y se traza $\overline{PN} \perp \overrightarrow{AC}$. Por Proposición XX resulta $\overline{MC} < \overline{PN}/2$, o sea, $\overline{PN} > 2\overline{MC}$, tal como $\overline{MC} > 2\overline{BD}$. Y así sucesivamente, siempre se puede encontrar un segmento $\overline{AP}$ múltiplo de $\overline{AB}$ tal que la distancia de P al otro lado del ángulo supere cualquier longitud dada.

Como corolario inmediato Saccheri afirma que, al estar la HAO ya refutada, "el teorema demostrado es siempre verdadero".

Perpendiculares comunes y asíntotas

PROPOSICIÓN XXII: si el cuadrilátero $ABCD$ es rectángulo en A y B y sus otros ángulos son agudos, puede trazarse entre $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ una perpendicular común[24] a AB y DC (Fig. 78).



(Fig. 78)

Antes de pasar a la demostración debe observarse que el $ABCD$ no es necesariamente un CBI. También nótese que en el enunciado AB y DC son las rectas que contienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$.

Demostración: si $\overline{AD} = \overline{BC}$ el cuadrilátero es un CBI y la recta perpendicular común es MH, la que contiene a los respectivos puntos medios, M y H, de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ (Proposición II).

Si $\overline{AD} > \overline{BC}$ se traza por un punto L de $\overline{DC}$ la recta $LK \perp AB$, con K necesariamente entre A y B por Euclides I.17 (¿cómo interviene I.17 para justificar este hecho?; pista: suponga que K está a la izquierda de A y una K con L...). Si los ángulos $\hat{1}$ y $\hat{2}$ no son rectos, uno es obtuso y el otro, agudo. Supongamos que $\hat{1}$ es obtuso.

23 He adaptado este enunciado para más claridad. El original no menciona el vértice.

24 Común en el sentido de "perpendicular a ambas rectas".

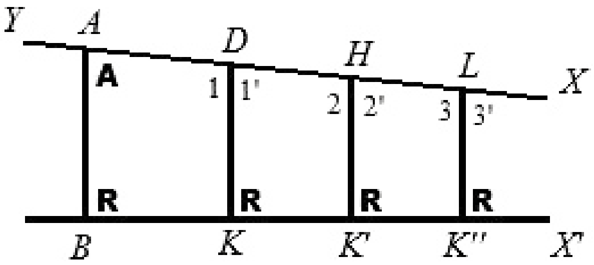
Ahora consideremos las posiciones intermedias de segmentos como $\overline{LK}$, perpendiculares a *AB*, entre $\overline{LK}$ y $\overline{BC}$, como si aquél se trasladara con movimiento continuo (hacia la derecha, en la figura) hasta coincidir con $\overline{BC}$. Los ángulos $\hat{1}$, en las sucesivas posiciones adoptadas por $\overline{LK}$, variarán desde una condición inicial de *obtuso* a una condición final de *agudo*, cuando $\hat{1}$ coincida con ∠*BCD*. Eso implica que en alguna posición intermedia, digamos $\overline{L'K'}$, es $\hat{1} = 1\text{R}$. Entonces la recta *L'K'* es la perpendicular común buscada.

La demostración se completa razonando similarmente, si se supone que $\hat{1}$ es agudo, lo cual no haremos aquí.

PROPOSICIÓN XXIII: dos rectas *AX* y *BX'* del mismo plano tienen una perpendicular común, o se encuentran a distancia finita, o van acercándose siempre una a la otra.

Saccheri nos presenta en esta proposición una clasificación, por él descubierta, de las rectas del plano, en el ámbito de la HAA. Luego inserta un corolario y una observación que hacen de este teorema algo francamente jugoso.

Demostración: (Fig. 79). Desde un punto cualquiera *A* de *AX* trazamos el segmento $\overline{AB} \perp BX'$.



(Fig. 79)

- Si ∠*BAX* = 1R, *AB* es la perpendicular común a *AX* y *BX'*.

- Si ∠*BAX* < 1R, trazamos por unos puntos *D*, *H*, *L*, ..., de *AX* segmentos perpendiculares a *BX'*: $\overline{DK}, \overline{HK'}, \overline{LK''}, \ldots$[25]. Si existe entre los ángulos $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots$, alguno *agudo*, aplicamos la Proposición XXII que asegura la existencia de una perpendicular común. O si hay alguno recto..., he allí la perpendicular común.

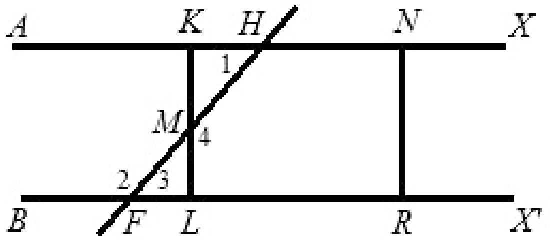
- La última posibilidad es que todos los ángulos $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots$, sean obtusos; sus adyacentes $\hat{1}', \hat{2}', \hat{3}', \ldots$, son, entonces, agudos. En el cuadrilátero *ABKD* es $\overline{AB} > \overline{DK}$ (corolario de la Proposición III). En el *DKK'H* es $\overline{DK} > \overline{HK'}$ por la misma razón. En *HK'K''L* se tiene $\overline{HK'} > \overline{LK''}$, etcétera. Estas desigualdades reunidas dan $\overline{AB} > \overline{DK} > \overline{HK'} > \overline{LK''}, \ldots$. Es decir que las rectas *AX* y *BX'* se van acercando mutuamente.

- Si ∠*BAX* > 1R se razona de igual manera pero con el ángulo ∠*BAY* adyacente (y suplementario, y agudo) de ∠*BAX*.

25 Aquí Saccheri no distingue, como nosotros, *K*, *K'*, *K''*; nombra *K* a todos esos puntos.

La observación que agrega Saccheri, posterior a la demostración, dice: si dos rectas *AX* y *BX'* son cortadas por otra *FH,* formándose ángulos conjugados internos suplementarios, dichas rectas admiten siempre una perpendicular común que se construye del siguiente modo.

En la Fig. 80 sea $\hat{1} + \hat{2} = 2\text{R}$. Se traza *M*, punto medio de $\overline{FH}$, y por él se trazan las perpendiculares *MK* y *ML* a *AX* y *BX'*, respectivamente.



(Fig. 80)

Como $\hat{1} + \hat{2} = 2\text{R}$ y $\hat{2} + \hat{3} = 2\text{R}$, resulta $\hat{1} = \hat{3}$. Los triángulos *MKH* y *MLF* son congruentes por Euclides I.26, ya que cada uno tiene un ángulo recto y, además, $\hat{1} = \hat{3}$ y $\overline{FM} = \overline{MH}$. (¡Cuidado con suponer que ∠*FML* y ∠*KMH* son opuestos por el vértice, y por ende congruentes, pues nada asegura que lo sean!). De la congruencia de esos triángulos se obtiene que ∠*FML* = ∠*KMH.* (*)

El ángulo ∠*FML* es adyacente del $\hat{4}$ y, en virtud de (*), y al compartir el vértice y un lado, ∠*KMH* también es adyacente del $\hat{4}$. Esto implica que los puntos *K*, *M* y *L*, están alineados y, por lo tanto, $\overline{KL}$ es la perpendicular común a *AX* y *BX'*[26].

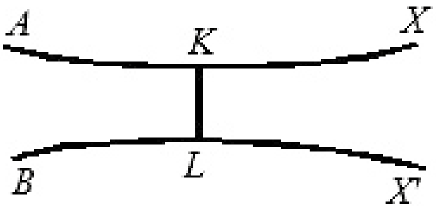
De los dos corolarios que Saccheri incorporó a esta proposición, lo medular del segundo es:

En la HAA cuando dos rectas forman con una tercera ángulos conjugados suplementarios (o lo mismo ángulos alternos congruentes o ángulos correspondientes congruentes) existe una perpendicular común y una sola...

Efectivamente, la perpendicular $\overline{KL}$ es única. Si hubiera otra, digamos $\overline{NR}$ (Fig. 80), tendríamos un cuadrilátero *NRLK* con cuatro ángulos rectos, lo que es imposible en la HAA. Luego, *NRLK debe* ser trirrectángulo.

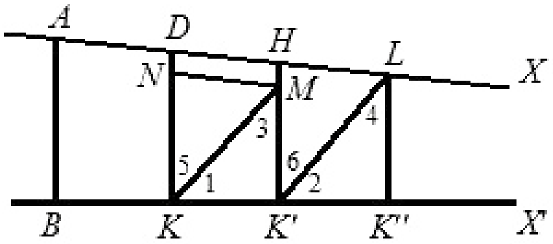
Además, la distancia más corta entre las rectas *AX* y *BX'* es, precisamente, la que hay entre *K* y *L*. En efecto, del corolario de la Proposición III se deduce que en un cuadrilátero trirrectángulo como *NRLK*, $\overline{NR} > \overline{KL}$, lo que implica que ambas rectas van aumentando su distancia mutua a medida que nos alejamos de la perpendicular común. La Fig. 81 nos ayuda a "ver" esta peculiar situación geométrica.

26 Sería más exacto referirse a la perpendicular común como la recta *KL*. Saccheri indica el segmento e incluso habla de la longitud de la perpendicular (en rigor, la del segmento de perpendicular).



(Fig. 81)

PROPOSICIÓN XXIV: dadas dos rectas cualesquiera *AX* y *BX'* (Fig. 82), la *BX'* perpendicular a *AB*, a *DK*, a *HK'*, a *LK"*, y estando los puntos *D, H, L* sobre *AX* a distancia creciente de *A*, y siendo $\overline{KK'} = \overline{K'K''}$, la suma de los ángulos del cuadrilátero *KDHK'* es menor que la del *K'HLK"* si $\overline{DK} > \overline{HK'} > \overline{LK''}$, y esto si *AX* y *BX'* se encuentran, o se acercan indefinidamente o si tienen una perpendicular común a partir de la cual divergen[27].



(Fig. 82)

Demostración: como $\overline{DK} > \overline{HK'} > \overline{LK''}$, se toman los puntos *N* y *M* tales que $\overline{NK} = \overline{HK'}$ (1) y $\overline{MK'} = \overline{LK''}$. Se trazan $\overline{NM}, \overline{KM}, \overline{K'L}$.

Los triángulos *KK'M* y *K'K"L* son congruentes por criterio LAL. De esto surge $\hat{1} = \hat{2}, \hat{3} = \hat{4}, \overline{KM} = \overline{K'L}$. (2)

Los triángulos *NKM* y *HK'L* son congruentes por el mismo criterio, ya que $\hat{5} = \hat{6}$ (por tener complementos iguales) y por (1) y (2). Luego sus otros dos pares respectivos de ángulos tienen la misma amplitud.

De estos razonamientos se deriva que son *iguales* las sumas de ángulos interiores de los cuadriláteros *NKK'M* y *HK'K"L*. (3)

El corolario de la Proposición XVI afirma que en el cuadrilátero *NDHM* la suma de los ángulos externos $\angle KNM$, $\angle NMK'$, es (en la HAA) mayor que la suma de los internos opuestos $\angle NDH$, $\angle DHM$. En virtud de esto y de (3) resulta demostrado el teorema.

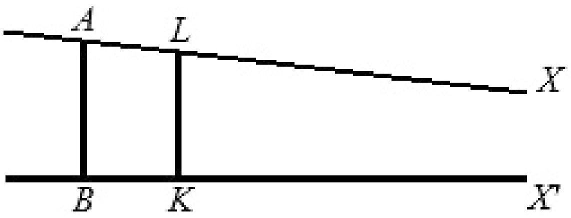
Siguen a esta proposición un corolario y una observación, a saber, respectivamente:

- el teorema demostrado es válido aunque *LK"* fuese una perpendicular común [a *AX* y *BX'*];

- si *AX* y *BX'* se aproximan entre sí indefinidamente, una perpendicular a *BX'* en un punto *K* del lado de *AB*[28] donde las rectas se acercan, encuentra a *AX* (Fig. 83). Omito la demostración.

27 La Fig. 82 es casi la misma que la de la Proposición XXIII. Es posible demostrar, en la HAO, que la suma de ángulos del *KDHK'* es mayor que la del *K'HLK"*.

28 Mejor "... en el semiplano determinado por *AB*...".



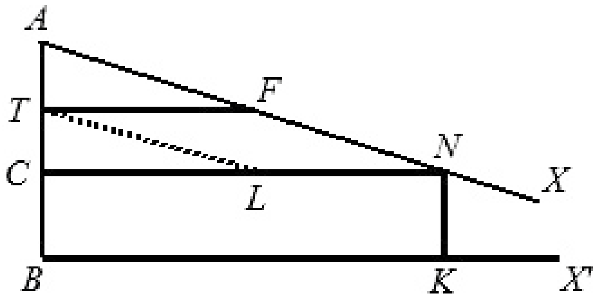
(Fig. 83)

En el siguiente teorema (Proposición XXV), que es bastante arduo y cuya demostración no veremos[29], Saccheri prueba que si la distancia entre una perpendicular y una oblicua a una misma recta, que se aproximan entre sí indefinidamente, se mantiene siempre mayor que una cierta longitud dada, la HAA queda destruida.

De dos corolarios insertados, el II merece ser transcripto por su brillantez:

> No se puede establecer la geometría euclidiana llamando paralelas a dos rectas perpendiculares a una tercera y concluyendo de esta definición que dos rectas que forman con una tercera ángulos internos cuya suma es menor de dos rectos se encuentran a distancia finita o infinita, porque debería primero probarse que estas dos rectas no tienen ninguna otra perpendicular común.

PROPOSICIÓN XXVI: en la HAA si AX es oblicua a AB y es asíntota a $BX' \perp AB$, una perpendicular a AB trazada por un punto cualquiera T situado entre A y B, encontrará a AX (Fig. 84).



(Fig. 84)

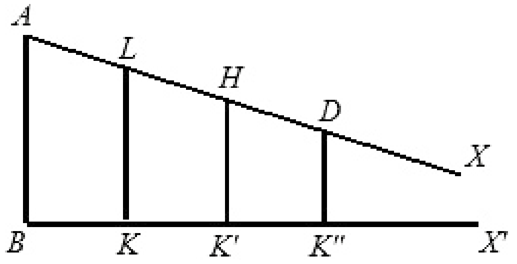
Demostración: habrá en AX un punto N tal que el segmento $\overline{NK} \perp BX'$ tendrá longitud menor a cualquier longitud dada, digamos, menor que la de $\overline{TB}$. Se traza en este último un punto C tal que $\overline{CB} = \overline{NK}$ y se dibuja $\overline{CN}$. Como $\angle NCB$ es agudo (¿por qué?) resulta que $\angle NCT$ es obtuso. De aquí se deduce que la perpendicular a AB trazada por T debe cortar a AX en F (Euclides I.17)[30]. En efecto, si no la cortara entre A y N encontraría a $\overline{CN}$ en un punto L entre C y N y el triángulo TCL contradiría a Euclides I.17.

29 (Saccheri, 1908: 58-61). La demostración ocupa algo más de tres páginas de retórica geométrica.

30 ¡La ubicua Proposición I.17 de Euclides! Debe ser así pues en cualquier triángulo que se forme, dos cualesquiera de los ángulos interiores no pueden sumar más de dos rectos. Por otra parte, respondiendo la pregunta formulada: $\angle NCB$ es agudo porque el *BKNC* es un *CBI*.

PROPOSICIÓN XXVII (sin demostración, Fig. 84): Si una oblicua *AX* que forma con *AB* un ángulo $\angle BAX$ suficientemente pequeño, encuentra siempre, a distancia finita o infinita, a cualquier perpendicular *BX'* a *AB,* cualquiera sea la distancia entre *B* y *A,* se puede establecer la falsedad de la *HAA* (Fig. 84).

PROPOSICIÓN XXVIII: en la *HAA,* si *AX* es oblicua a *AB* y es asíntota a $BX' \perp AB$, y si *L, H, D,* etc., son puntos de *AX* por los cuales se han trazado las perpendiculares a *BX'*: $\overline{LK}, \overline{HK'}, \overline{DK''}$, etc., y los ángulos $\angle KLA$, $\angle K'HA$, $\angle K''DA$, etc., son todos obtusos[31], estos van decreciendo y tienen por límite un ángulo recto (Fig. 85).



(Fig. 85)

Nótese que esta situación no es otra que la de la Proposición XXIII para el caso en que resultan asíntotas *AX* y *BX'*. Lo que este teorema agrega es que los ángulos obtusos tienden a 1R a medida que nos alejamos de $\overline{AB}$.

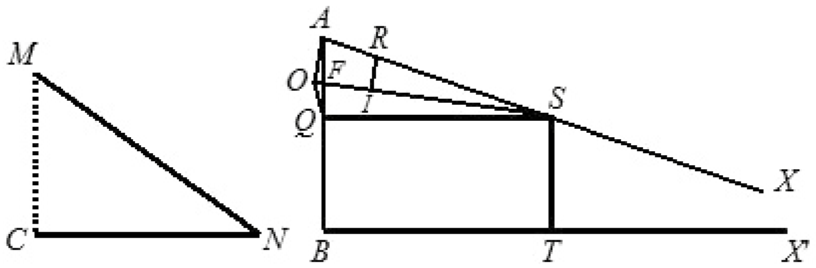
Demostración: por el corolario de la Proposición XVI, se tiene que

$\angle KLA + \angle BKL$ (= 1R) > $\angle K'HA + \angle BK'H$ (= 1R), es decir, $\angle KLA + 1R > \angle K'HA + 1R$, de donde $\angle KLA > \angle K'HA$.

Razonando de idéntica manera se deduce que $\angle K'HA > \angle K''DA$, etcétera.

Para demostrar que la sucesión decreciente de ángulos obtusos tiene como límite 1R, debe comprobarse que se puede hallar siempre en ella un ángulo, tal que su diferencia con 1R es menor que cualquier ángulo dado, por pequeño que sea. (Bueno, esto que sigue es para valientes).

Consideremos el $\angle MNC$ (Fig. 86, izquierda). Supongamos que la diferencia con 1R de un ángulo *cualquiera* de la sucesión, nunca es menor que $\angle MNC$. (1)



(Fig. 86)

31 Se ha adaptado casi completamente el enunciado original ya que, por ejemplo, Saccheri dice, de manera más bien imprecisa, que "los ángulos en *L, H, D...* son todos obtusos del lado de la perpendicular más larga...", etc.

Por la Proposición XXI se sabe que la longitud de un segmento como $\overline{MC}$ puede superar cualquier valor dado. Supongamos $\overline{MC} > \overline{AB}$. (2)

Sobre *BX'* se construye $\overline{BT} = \overline{CN}$ y, por *T*, $\overline{TS} \perp BX'$, que corta a *AX* en *S* (véase la observación a la Proposición XXIV). Se traza $\overline{SQ} \perp \overline{AB}$, con *Q* entre *A* y *B*[32]. En el *QSTB*, trirrectángulo, resulta ∠*QST* agudo. De aquí $\overline{QS} > \overline{BT} = \overline{CN}$.

De todo esto se deduce que ∠*ASQ* > ∠*AST* – 1R[33]. Para más claridad véase la Fig. 87.

Pero entonces, por la suposición (1) se tiene que ∠*ASQ* > ∠*MNC*.

Se traza ahora $\overrightarrow{SF}$, que forma ∠*ASF* = ∠*MNC* y que corta a *AQ* en *F* (Fig. 86, nuevamente). Desde *A* se construye el segmento $\overline{AO} \perp \overrightarrow{SF}$. (Siendo ∠*AFS* obtuso[34], la ubicación de *O* sobre la recta *SF* es la que se muestra[35]). Al ser $\overline{SF} > \overline{QS} > \overline{BT} = \overline{CN}$, se toma *I* en $\overline{SF}$ tal que $\overline{IS} = \overline{CN}$, y desde *I* se traza $\overline{IR} \perp \overline{FS}$, situándose *R* entre *A* y *S*.

(Fig. 87) Detalle de la Fig. 86, donde agregamos la línea punteada tal que ∠*JST* = 1R; luego ∠*ASJ* = ∠*AST* – 1R, esto es, la diferencia con 1R del ángulo obtuso ∠*AST*. Se ve que ∠*ASQ* > ∠*AST* – 1R.

Una consecuencia de esta construcción es que los triángulos *MNC* y *RSI* son congruentes por criterio ALA; de aquí $\overline{IR} = \overline{MC}$. (3)

Veamos ahora el cuadrilátero *AOIR*. En él $\hat{O} = \hat{I} = 1R, \hat{R} > 1R$ (Euclides I.16) y $\hat{A} < 1R$. De esto resulta que $\overline{AO} > \overline{IR}$ (corolario de la Proposición III). (4)

Se traza $\overline{OQ}$. Luego $\overline{AQ} > \overline{AO}$ y por (3) y (4), $\overline{AQ} > \overline{IR} = \overline{MC}$, pero por (2) $\overline{MC} > \overline{AB}$, luego $\overline{AQ} > \overline{AB}$, absurdo pues $\overline{AQ} < \overline{AB}$.

La contradicción surge de aceptar como cierta (1).

32 El argumento de por qué *Q* cae entre *A* y *B,* es nuestro teorema amigo Euclides I.17. En efecto, si *Q* cayera, por ejemplo, más allá de *B,* se formaría un triángulo contradictorio con dicha proposición de *Elementos.*

33 ∠*AST* es obtuso porque *AX* y *BX'* son asíntotas.

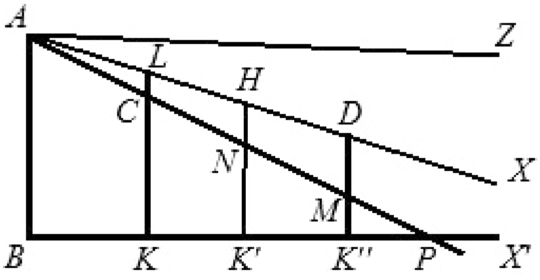
34 Por Euclides I.16 en el triángulo *FQS* rectángulo en *Q*.

35 Otra vez, Euclides I.17 y también, más adelante, para *R* que cae entre *A* y *S*. Seriamente consideré crear un club de *fans* de Euclides I.17. Esta última oración es un tributo a Sebastián Galizzi, mi editor.

Luego en la sucesión decreciente de ángulos obtusos existirá siempre un elemento cuya diferencia con 1R puede hacerse menor que cualquier ángulo dado, por pequeño que sea, y dicha sucesión tiene por límite 1R. ¿Has llegado hasta aquí, lector valiente?

Saccheri nos ha hecho agitar. Y atención ahora, por favor, ¡qué corolario!; es para ponerlo en un cuadrito: *las dos rectas AX y BX' tienden a tener una perpendicular común en un punto común en el infinito.*

PROPOSICIÓN XXIX: si *AX* es asíntota a *BX'*, una semirrecta $\overrightarrow{AC}$, interior al ∠*BAX*, encuentra a *BX'* en un punto *P*, a distancia finita.



(Fig. 88)

Demostración: (Fig. 88). Como *AC* y *AX* no pueden encerrar un espacio[36], *AC* debe encontrar a $\overline{LK}, \overline{HK'}, \overline{DK''}$, ... en *C*, *N*, *M*, ..., a no ser que hubiera ya cortado a *BX'* en algún punto entre *B* y *K*, *K'* o *K''*, en cuyo caso el teorema resultaría demostrado.

Supóngase ahora que, luego de *M*, *AC* no encontrara a *BX'* (*). Por la Proposición XVIII los ángulos ∠*ALK*, ∠*AHK'*, ∠*ADK''*, ..., son obtusos de amplitud decreciente y con 1R como límite. También ∠*ACK*, ∠*ANK'*, ∠*AMK''*, ..., son obtusos de amplitud decreciente y con 1R como límite, por ser exteriores de los triángulos *ALC*, *AHN*, *ADM*. Sin embargo, se podrá alcanzar un ángulo ∠*K''MA* cuyo exceso sobre 1R será menor que cualquier ángulo dado, por pequeño que sea; por ejemplo, menor que el ángulo ∠*DAM*.

Entonces ∠*DAM* + ∠*DMA* > 1R, y en el triángulo obtusángulo *ADM* la suma de los ángulos supera a 2R, lo que contradice la HAA (Proposición IX) en la que se ubica este teorema. La contradicción provino de aceptar (*).

Corolario I: toda recta *AZ* que forma con *AB* un ángulo agudo ∠*ZAB* > ∠*XAB*, no es asíntota a *BX'*.

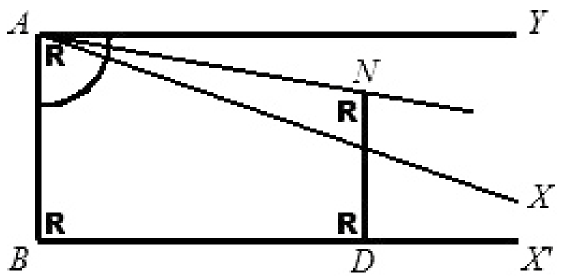
Corolario II: el ángulo ∠*PAB*, al crecer $\overline{PB}$ indefinidamente, no tiene valor máximo pero tiende al límite inaccesible *XAB*.

PROPOSICIÓN XXX (Fig. 89): sea $BX' \perp AB$. Una recta que tiene perpendicular común con *BX'* es $AY \perp AB$. No existe una última oblicua *AN* a *AB* que tenga perpendicular común con *BX'*.

A fin de abreviar un poco el desarrollo se omite la demostración (Saccheri, 1908: 72). El teorema afirma, en otras palabras, que *cualquier* oblicua dentro del ∠*XAY* tiene una perpendicular común y única

36 Decir que dos rectas no encierran espacio equivale a afirmar que dos rectas no pueden cortarse en dos puntos diferentes. Esta aseveración figura como axioma en algunas ediciones de *Elementos.*

con *BX'*. Además, en corolario inmediato, demuestra que el segmento de perpendicular común, digamos $\overline{ND}$, será tanto más corto cuanto menor sea el $\angle XAB$. Completa Saccheri este concepto, finalmente, en la Proposición XXXI según la cual al decrecer $\angle XAB$ dicho segmento tiene por límite cero.



(Fig. 89)

Estamos llegando a un punto crucial en el largo camino emprendido.

PROPOSICIÓN XXXII (Fig. 89): en la hipótesis del ángulo agudo existe un ángulo $\angle XAB$ tal que

- *AX* no encuentra a $BX' \perp AB$;

- toda oblicua comprendida en el $\angle XAB$ encuentra a *BX'*;

- toda oblicua que forma con *AB* un ángulo agudo mayor que $\angle XAB$, o un ángulo recto, tiene con *BX'* una perpendicular común a distancia finita.

Este teorema es de resumen de las Proposiciones XXIX, XXX y XXXI.

Una clasificación de las rectas y un desenlace

Ante tal torbellino de teoremas, corolarios y comentarios, que ha sacudido nuestros cabellos (en especial lo digo por mí), quiero llamar la atención sobre un hito fundamental que ha alcanzado Saccheri. Este punto sintetiza, en cierto modo, toda la novedad de su incursión por la hipótesis del ángulo agudo, la cual resistió todos los embates para derribarla.

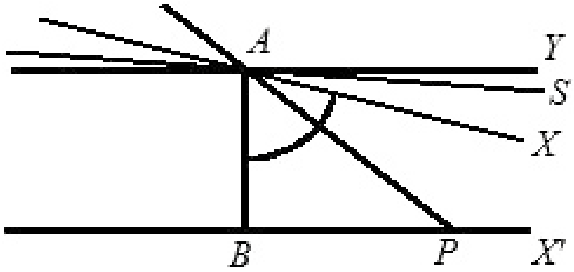
El preclaro jesuita concluyó al fin que en la HAA existe una *clasificación* de las rectas de un plano que pasan por un punto exterior *A* a una recta *BX'*.

Concretamente, por *A* pasan (Fig. 90):

a) rectas *incidentes* con *BX'*, como *AP* y *AB*;

b) la asíntota *AX no incidente* con *BX'*;

c) rectas *no incidentes* con *BX'* y no asíntotas con ella, como *AS* y *AY*.



(Fig. 90) La clasificación de rectas por *A*, exterior a *BX'*.

Nótese el papel decisivo que tiene el ángulo $\angle XAB$. Más adelante nos ocuparemos de dicho ángulo cuando abordemos la geometría hiperbólica.

Para finalizar este capítulo dedicado al impresionante intento de Saccheri por probar la veracidad del Postulado, haré referencia al desenlace del mismo. Es el lugar ahora de la sorprendente

PROPOSICIÓN XXXIII: la hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta.

Argumenta Saccheri:

> En efecto, si fuese verdadera, la recta *AX* oblicua a *AB* y asíntota a *BX',* perpendicular a *AB,* tendría con *BX'* una perpendicular común en un punto común en el infinito, lo que es contrario a la naturaleza de la línea recta, como demostraremos en los siguientes lemas...

Siguen cinco lemas, algunos con corolarios, de los que no nos ocuparemos y cuya consecuencia sería la falsedad de la HAA. Luego, en una segunda parte del libro, propone demostrar por otra vía dicha falsedad, para lo cual agrega las Proposiciones XXXIV a XXXIX (Saccheri, 1908: 82-94).

Realmente Saccheri no refutó la hipótesis del ángulo agudo, ni hubiera podido hacerlo por el hecho de que la misma conduce a lo que hoy conocemos como *geometría hiperbólica,* rama compatible de la geometría (véase cap. 5, pág. 83). El autor la declara falsa sin un argumento matemático, sino más bien afincándose en una concepción clásica de la línea recta. Saccheri, que en muchos aspectos demostró gran agudeza de razonamiento y un pensamiento innovador y hasta atrevido, en este tramo final estuvo más bien en sintonía con las concepciones preexistentes de su época.

Este es un final poco feliz, aunque de ninguna manera opaca todo el esfuerzo y los descubrimientos de nuestro jesuita matemático: "(...) toda conquista humana es, en esencia, inolvidable e inmortal aun cuando se la reemplace por una 'mejor'" (Sarton, 1965: XVII del Prefacio).

[Capítulo 9]

Teoría general del paralelismo

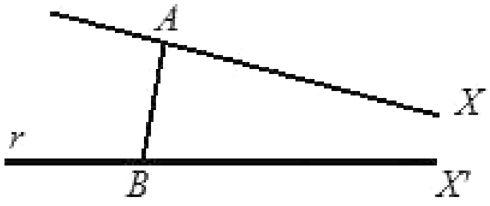
Podemos decir que lo que viene a continuación es una teoría de las paralelas *anterior* a la adopción de cualquier axioma de paralelismo. Esta se apoya sobre los postulados de incidencia, congruencia, continuidad y orden, y los teoremas de ellos obtenidos.

En este capítulo también abordaremos dos interesantes interpretaciones de los axiomas de la geometría plana, lo que servirá para enriquecer lo tratado en el capítulo 5.

Definición de recta paralela

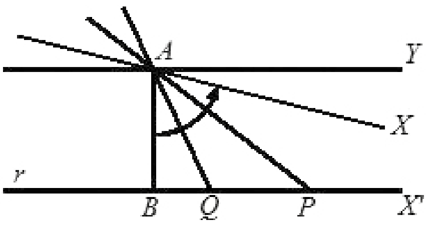
En una primera aproximación, veremos cómo define Gauss "recta paralela"[1] (Fig. 91). Luego se verá de esta una definición más elaborada, aunque aunque eso no signifique que la del *Princeps mathematicorum*[2] sea errónea.

Si la recta *AX,* coplanar y no incidente con $r = BX'$ es tal que toda recta trazada por *A* y comprendida en el $\angle BAX$ encuentra a r, entonces *AX* se dice paralela a *r.* (Bonola, 1945: 78)[3].



(Fig. 91)

Consideremos la recta $r = BX'$ y un punto *A* exterior a ella (Fig. 92).



(Fig. 92)

1 Lo correcto es decir "recta paralela a otra recta", ya que una sola recta no alcanza para establecer la relación de paralelismo. Sin embargo, el uso aquí ha reemplazado sin confusiones el concepto.

2 Es decir, "príncipe de los matemáticos". Con ese impresionante apelativo la posteridad científica (excepto, posiblemente, János Bolyai, véase cap 10, pág. 176) reconoció a Johann Carl Friedrich Gauss.

3 Nótese la diferencia entre esta definición y la de Euclides (Def. 35, véase la nota 19 del cap. 4).

$\overline{AB} \perp r$ por *A*. Además, $AY \perp \overline{AB}$. La recta *AY* no encuentra a *r* por el teorema que afirma que dos perpendiculares a una misma recta no se cortan (un encuentro entre ellas contradiría Euclides I.17).

Para establecer la definición de "paralela a *r* por *A*" vamos a definir una cortadura en el conjunto de las rectas por *A* (véase cap. 6, pág. 107). En ese conjunto de rectas podemos constatar que existen dos subconjuntos, K y K', no vacíos y disjuntos (esto es, la intersección de K y K' es el conjunto vacío):

K = {rectas incidentes con *r*}, como *AB*, *AQ* y *AP*.

K' = {rectas no incidentes con *r*}, como *AY* y, tal vez, otras.

Siendo el plano continuo, puede establecerse una una *relación de orden* entre las rectas que pasan por *A* y, por ende, también entre las rectas de K y K'. Diremos, por ejemplo, que *AQ* precede a *AP* y que *AP* precede a *AX*. Esta relación se sustenta en el ordenamiento del conjunto de los ángulos de vértice *A*, lado fijo $\overrightarrow{AB}$ y lado móvil que va ocupando las posiciones desde $\overrightarrow{AB}$ hasta $\overrightarrow{AY}$, como indica la flecha de la Fig. 92, y cuya amplitud va variando en el intervalo [0; π/2].

Basándonos en esto queda claro que todas las rectas de K preceden a las de K'. De esto surge que puede definirse una cortadura en el conjunto de las rectas por *A* y que existe un elemento de separación entre K y K'. Este elemento de separación es la recta *AX*.

Podemos ahora definir *paralela.*

La paralela a *r* por *A* es la recta *AX*, elemento de separación entre las rectas incidentes y no incidentes con *r* por el punto *A*.

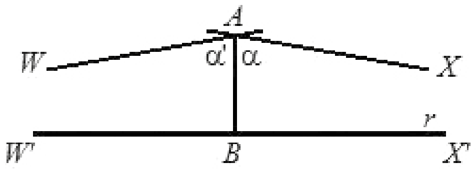
Toda recta por *A* que tiene puntos en el interior del ángulo ∠*BAX* corta *necesariamente* a *r* (acorde con la definición de Gauss). La siguiente es una equivalencia fundamental:

"*AX* // *r*" ⇔ "Toda semirrecta de origen *A* interior al ∠*BAX* corta a *r*"

Ángulo y distancia de paralelismo, y dos paralelas

Viendo de nuevo la Fig. 92, denominaremos *ángulo de paralelismo* al ∠*BAX* = α y *distancia de paralelismo* a la longitud del segmento $\overline{AB} \perp r$.

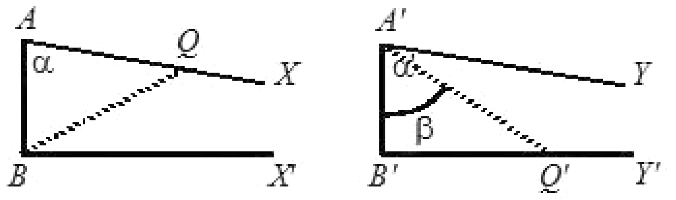
Hay una situación completamente simétrica en el semiplano izquierdo respecto de $\overline{AB}$, que nos permite hallar *otra* recta *AW* paralela a *r*, con ángulo de paralelismo ∠*BAW* = α' = α, e igual distancia de paralelismo (Fig. 93).



(Fig. 93) Las paralelas generales.

Dentro de la generalidad en que nos situamos, no decimos nada sobre la amplitud del ángulo de paralelismo: podría ser agudo o recto.

Vamos a demostrar que a distancias de paralelismo iguales corresponden ángulos de paralelismo iguales.



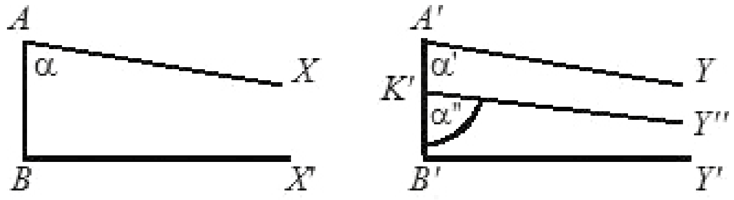
(Fig. 94)

Demostración: (Fig. 94) consideremos *AX* // *BX'*, *A'Y* // *B'Y'*, $\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AB} \perp BX', \overline{A'B'} \perp B'Y'$.

Negamos la tesis y suponemos que α' ≠ α, en particular, que α' > α. Es posible trazar, entonces, una semirrecta interior a α' que determina con $\overline{A'B'}$ un ángulo β = α. Tal semirrecta debe cortar a *B'Y'* en un punto *Q'*, pues *A'Y* // *B'Y'* (por definición de paralela). Ahora en $\overrightarrow{AX}$ se construyen $\overline{AQ} = \overline{A'Q'}$ y $\overline{BQ}$. Los triángulos *ABQ* y *A'B'Q'* resultan congruentes por criterio LAL y de aquí surge que ∠*ABQ* = ∠*A'B'Q'* = 1R, lo que es absurdo pues hay dos perpendiculares a *AB* por *B* (*BQ* y *BX'*)[4]. Luego no puede ser α' > α.

Razonando en todo análogamente para el caso α' < α, y ante una nueva situación imposible, queda probado que α' = α. En conclusión: $\overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow$ α = α'.

Resulta muy interesante que no es posible, en cambio, demostrar la recíproca de esta implicación. Efectivamente, sea α = α'. Vamos a negar la tesis y suponer que $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$, digamos $\overline{AB} < \overline{A'B'}$. Tomamos un punto *K'* en este último segmento tal que $\overline{B'K'} = \overline{AB}$ (Fig. 95). Ahora trazamos *K'Y''* // *B'Y'* y por lo ya demostrado resulta α = α''. Es más: α = α' = α''. Esto no trae ningún problema, y lo mismo sucede si analizamos el caso $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Luego, si los ángulos de paralelismo son iguales, las distancias de paralelismo pueden ser iguales o no. Esto quedará modificado cuando se acepte como válido algún postulado de paralelismo.



(Fig. 95)

4 Si por un punto de una recta pasan dos perpendiculares distintas a dicha recta, los ángulos rectos no serían congruentes entre sí, como se establece en la teoría (o como fija Euclides en su Postulado IV).

Sentido del paralelismo y algunas propiedades

Volvamos a la Fig. 93. Cada una de las paralelas consideradas lo es en relación con un *sentido* determinado en *r*, digamos que *AX* es paralela a *r* “hacia la derecha” y *AW* lo es “hacia la izquierda”. Más correctamente deberíamos decir “en el sentido *BX*’ o *BW*’”, respectivamente.

Si *AX* y *AW* coincidieran sería *WX* // *r* en ambos sentidos.

Es de cuidar el sentido del paralelismo al escribir simbólicamente que una recta es paralela a otra. Diremos, por ejemplo, que *AX* // *BX*’, y no que *AX* // *X’B*. También, si afirmamos “*AW* // *r*” se entiende que el paralelismo considerado es hacia la izquierda (o en el sentido *BW*’).

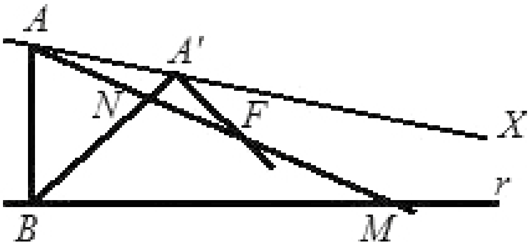
El punto *A* no tiene particular importancia en cuanto al paralelismo. En efecto, el paralelismo se conserva sin importar el punto de la recta que consideremos. Demostraremos que si *AX* // *r* y *A*’ es otro punto de *AX*, entonces *A’X* // *r*. Lo haremos en dos partes:

a) si *A-A’-X*;[5]

b) si *A’-A-X*.

Demostración:

a) Sea *AX* // *r* y *A-A’-X* (Fig. 96). Unimos *B* con *A*’. Sea $\overrightarrow{A'F}$ una semirrecta cualquiera interior al ∠*BA’X*, con *F* situado en el mismo semiplano de borde *r* en que está *AX*.



(Fig. 96)

Al ser *F* interior al ángulo de paralelismo ∠*BAX*, $\overrightarrow{AF}$ corta a *r* en *M* y, además, por el axioma del segmento con extremos en los lados de un ángulo, encuentra a $\overline{BA'}$ en *N*.

Vayamos ahora al triángulo *BNM*. $\overrightarrow{A'F}$ encuentra al lado $\overline{NM}$ en *F* y no puede cortar a $\overline{BN}$ puesto que corta a la recta *BN* en *A*’, que es exterior a $\overline{BN}$. Por lo tanto, por el axioma de Pasch (véase cap. 6, pág. 97), debe cortar al lado $\overline{BM}$, es decir, a *r*.

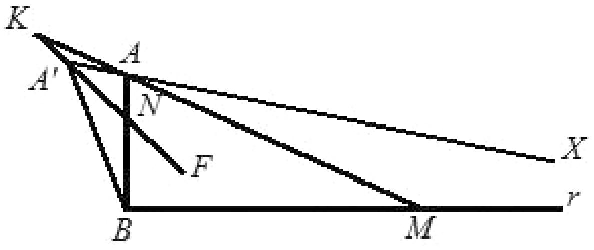
Ahora invocamos la equivalencia citada en la página 158:

“toda semirrecta de origen *A*’ interior al ∠*BA’X* corta a *r*” ⇔ “*A’X* // *r*”,

es decir que el paralelismo se conserva por *A*’.

5 Recuérdese que *A-A’-X* significa que los puntos *A, A*’ y *X,* están alineados y que *A*’ está entre *A* y *X*.

b) Sea *A'-A-X* (Fig. 97). Trazamos $\overline{BA'}$ y $\overrightarrow{A'F}$, siendo *F* interior al ∠*BA'X* con *F* en el mismo semiplano de borde *r* en que está *AX*.

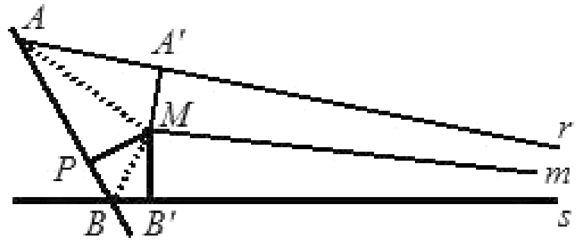


(Fig. 97)

Sobre la prolongación de $\overline{FA'}$ se toma un punto *K* y se dibuja $\overrightarrow{KA}$, que necesariamente corta a *r* en *M* pues *AX* // *r*.

En el triángulo *ABM* $\overrightarrow{A'F}$ intersecta a $\overline{BA}$ en *N* y no puede cortar a $\overline{AM}$ pues encuentra a *AM* en *K*, exterior a $\overline{AM}$. De esto se desprende que debe cortar a *r* y, de aquí, *A'X* // *r*. El paralelismo se mantiene por *A'*.

El paralelismo en un sentido dado es una relación simétrica. Vamos a demostrar que si *r* // *s*, entonces *s* // *r*.



(Fig. 98)

Demostración: considérese que *r* // *s* hacia la derecha de la Fig. 98. Sea la transversal *AB* y las bisectrices de los ángulos conjugados internos, que se muestran con línea discontinua[6]. Estas bisectrices se cortan en *M*.

Se trazan $\overline{A'M} \perp r, \overline{PM} \perp AB, \overline{B'M} \perp s$. Además, por situarse *M* en la bisectriz $\overrightarrow{AM}$ resulta $\overline{A'M} = \overline{PM}$. Luego, por criterio LLA[7] son congruentes los triángulos rectángulos *APM* y *AA'M*. Por análogas razones también son congruentes los triángulos *BPM* y *BB'M*[8].

Sea *m* la bisectriz del ∠*A'MB'*. Dado que $\overline{A'M} = \overline{B'M}$, *A'* y *B'* son simétricos respecto de *m* y resultan también simétricas *r* y *s* respecto de *m*. Esta simetría garantiza que también *s* // *r* hacia la derecha.

6 Debería ser más preciso en la descripción, pero prefiero simplificarla antes que recargarla con términos.

7 El cuarto criterio: *dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente congruentes, y congruentes los ángulos opuestos a los lados mayores.* Véase también Euclides I.26.

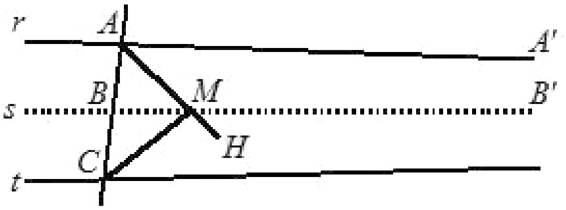
8 Se trata de triángulos simétricos "inversamente congruentes". Véase la nota 7 del cap. 8.

Corolario: el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas paralelas es una recta paralela a ambas (en la figura es la recta *m*).

El paralelismo, siempre considerado en un sentido, verifica la transitividad, esto es: dos rectas paralelas a una tercera, en un sentido, son paralelas entre sí.

Demostración: sean *r*, *s* y *t* rectas, *r // s* y *t // s*. Distinguiremos dos partes del teorema.

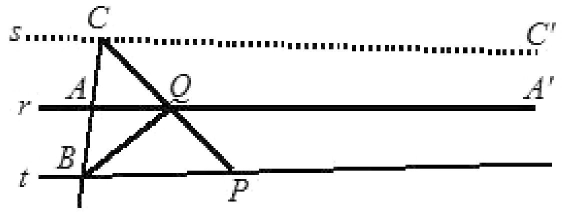
a) *r* y *t* están en semiplanos opuestos respecto de *s* (Fig. 99). Sea *AC* una transversal que pasa por *A* de *r* y *C* de *t*. Ésta corta a *s* en *B* pues *A* y *C* están en distintos semiplanos respecto de *s*.



(Fig. 99)

En el ∠*CAA'* se traza la semirrecta arbitraria $\overrightarrow{AH}$, que corta a *s* en *M* pues *r // s*. Se dibuja $\overline{CM}$. En el ∠*CMB'* la $\overrightarrow{MH}$ encuentra a *t* por ser *s // t*. Pero esto implica que $\overrightarrow{AH}$ también corta a *t*, luego *r // t*.

b) *r* y *t* están en un mismo semiplano respecto de *s* (Fig. 100).



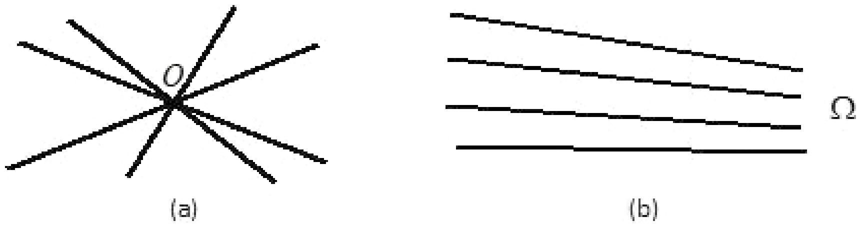
(Fig. 100)

De las rectas *r* y *s*, una de ellas (digamos *r*) deja a las otras en diferentes semiplanos. Si *C* está en *s* y *B* está en *t*, la transversal *CB* corta a *r* en *A*. Toda semirrecta interior al ∠*BCC'* intersecta a *t* por ser *s // t*. Pero también corta a *r* en Q pues *s* y *t* están en semiplanos distintos respecto de *r*. Se traza $\overline{BQ}$ y completamos la demostración en el ∠*BQA'* razonando como en (a). Luego, *r // t*.

Si se excluye la aclaración sobre el sentido del paralelismo deja de valer la transitividad. Por ejemplo, en la Fig. 93, *AX // r* y *AW // r*, pero no es *AX // AW*.

Haces y puntos propios e impropios

Se denomina *haz de rectas* al conjunto infinito de las rectas de un plano que pasan por un punto llamado *centro* del haz, como se representa en la Fig. 101 (a). A partir de ahora a este haz y a su centro los adjetivaremos *propios*.



(Fig. 101)

En relación con el haz propio nótese que:

1 - Conocidas dos rectas del haz, este queda determinado, ya que ellas al cortarse determinan el centro *O*.

2 - Por un punto cualquiera del plano pasa una única recta del haz.

3 - Todas las rectas del haz "comparten" el punto *O*.

Sea el conjunto de las infinitas rectas paralelas a una dada, en un sentido dado, como el representado en la Fig. 101 (b). Vamos a establecer una analogía entre este conjunto y el haz propio.

Todas las rectas del conjunto "comparten" el sentido del paralelismo. Adaptemos los términos, llamando "punto impropio" al sentido de paralelismo (en la mente matemática es solo un cambio de vocabulario para unificar conceptos), y pongámosle el símbolo Ω (la letra griega omega mayúscula). Entonces diremos que el conjunto de esas rectas es un *haz de paralelas* o *haz impropio* de centro (impropio) Ω.

Obsérvese que:

1 - Conocidas dos rectas del haz, este queda determinado, pues determinan un punto impropio en virtud de su sentido de paralelismo.

2 - Por un punto cualquiera del plano pasa una única recta del haz.

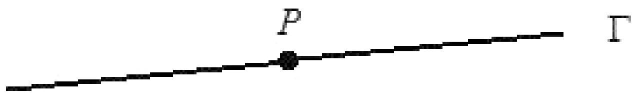
3 - Todas las rectas del haz "comparten" el punto impropio Ω.

Las similitudes entre ambos haces, expuesta en los ítem 1 a 3, simplifica la teoría. Podemos afirmar que "las paralelas del haz impropio concurren en un punto impropio (o en el infinito) Ω"[9].

9 Debido a esta ampliación de términos, la proposición *"dos rectas de un plano siempre se encuentran"* es siempre cierta ya que pueden hacerlo en un punto propio o en uno impropio. La geometría denominada "proyectiva" trabaja con un plano que se llama "ampliado" o "extendido" que comprende, además de los puntos ordinarios (propios) los puntos en el infinito (impropios), definiéndose también la "recta im-

Así como hay infinitos haces de rectas propios, los hay infinitos impropios. En efecto, cada sentido de paralelismo determina un haz de paralelas.

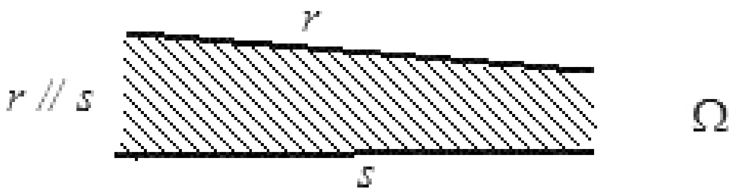
Representaremos los puntos impropios con letras griegas mayúsculas: Ω (omega), Γ (gamma), Δ (delta), Π (pi), etc. Una recta puede nombrarse con un punto propio y su punto impropio, por ejemplo, *P*Γ. (Fig. 102).



(Fig. 102)

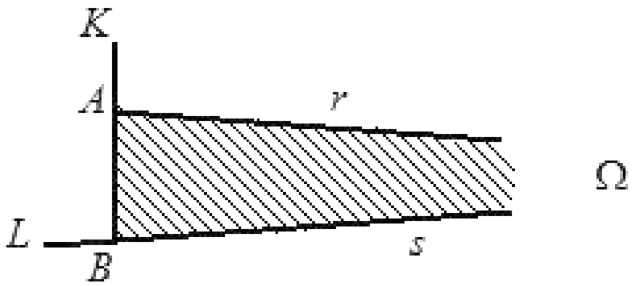
Fajas y triláteros

La región del plano comprendida entre dos paralelas *r* y *s* se llama *faja* o *zona*. El símbolo correspondiente es (*rs*) (Fig. 103).



(Fig. 103)

Si se traza un segmento que tenga como extremos un punto de *r* y otro de *s*, queda determinada una figura que se denomina *trilátero.* Se ve en la Fig. 104 el trilátero *AB*Ω y, en la tabla anexa, sus elementos. Los lados impropios son de longitud infinita. El ángulo impropio tiene amplitud nula y su vértice está en el infinito. Los ángulos exteriores son los adyacentes de los interiores; en particular nótese que el exterior adyacente de $\hat{\Omega}$ vale 2R.



(Fig. 104)

propia" a la que pertenecen todos ellos. Por lo tanto también es siempre cierta la afirmación *"dos puntos* (propios o impropios) *determinan una única recta".*

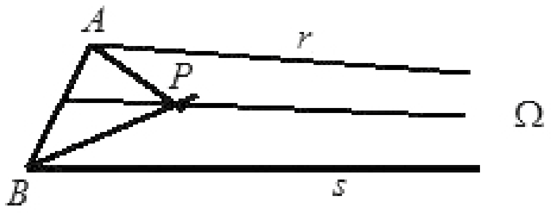
Elementos del trilátero	Propios	Impropios
Vértices	A, B	Ω
Lados	$\overline{AB}$	$\overline{A\Omega}, \overline{B\Omega}$ o $\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{B\Omega}$
Ángulos interiores	$\hat{A} = \angle \Omega AB$, $\hat{B} = \angle AB\Omega$	$\hat{\Omega} = \angle A\Omega B$ (ángulo nulo)
Ángulos exteriores	$\angle LBK$ $\angle KA\Omega$	Semiplano de borde s que no contiene a A[a]

Si alguno de los ángulos propios es recto, el trilátero es *rectángulo* y el lado propio se llama *cateto.* Si los ángulos propios son iguales el trilátero es *isósceles*. Dentro de esta teoría general un trilátero puede ser ambas cosas.

Algunos teoremas relacionados con triláteros son los siguientes:

1 - Una recta que pasa por un solo vértice y por un punto interior del trilátero, corta al lado opuesto.

Demostración:

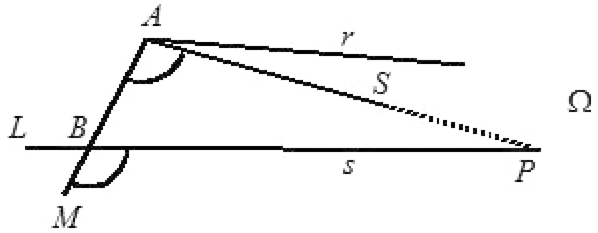


(Fig. 105)

cualquier recta que contiene a A (o a B) y a un punto interior P del trilátero corta a s (o a r) justamente por ser $r \,//\, s$ (Fig. 105). Cualquier recta que contiene a P y a Ω es, por este hecho, paralela a r y a s, y encuentra a $\overline{AB}$ pues este segmento corta a la faja (rs).

2 - Una recta que no pasa por un vértice y corta a un lado, corta a otro lado y sólo a uno. (Se omite la demostración).

3 - Un ángulo exterior es mayor o igual que el interno opuesto.



(Fig. 106)

a Como no puede nombrarse el ángulo exterior impropio de vértice Ω con la notación tradicional, ya que no tenemos otra letra "más allá de Ω", y al ser su medida 2R, no hay inconveniente en identificarlo como un semiplano. De hecho, un ángulo llano es un semiplano.

Demostración: sea el trilátero $AB\Omega$ y $\angle MB\Omega$ un ángulo exterior propio (Fig. 106). Por supuesto que el teorema es cierto si se considera el ángulo exterior impropio, que vale 2R. Supóngase que $\angle MB\Omega < \angle BA\Omega$. Entonces trazamos $\overrightarrow{AS}$ tal que $\angle BAS = \angle MB\Omega$ (1). Como $r \parallel s$, $\overrightarrow{AS}$ va a cortar a s en P, determinando el triángulo BAP. Tenemos:

$\angle MB\Omega$ (= $\angle MBP$) + $\angle ABP$ = 2R por ser adyacentes. Y por (1):

$\angle BAS$ (= $\angle BAP$) + $\angle ABP$ = 2R.

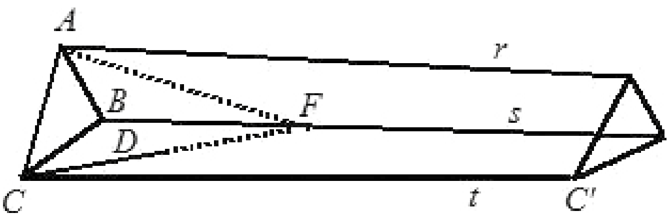
Pero esto contradice Euclides I.17. Esto demuestra que $\angle MB\Omega \geq \angle BA\Omega$.

4 - Dos triláteros son congruentes si tienen congruentes sus lados y ángulos propios. (Se omite la demostración).

Paralelismo en el espacio

Veamos algunos detalles del paralelismo en tres dimensiones que luego nos serán necesarios. Comencemos con un teorema.

Si tres planos se cortan mutuamente de modo que dos de las rectas de intersección son paralelas (en un sentido), entonces la tercera recta de intersección es paralela a ellas.



(Fig. 107)

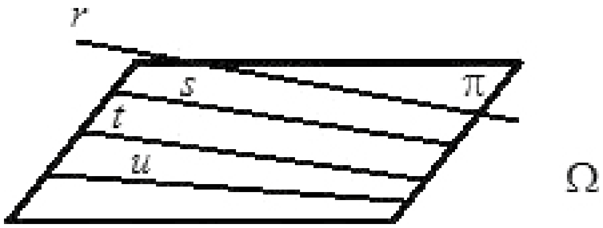
Demostración: sean tres planos que se cortan dos a dos en r, s y t, con $r \parallel s$ (Fig. 107).

Consideremos una semirrecta cualquiera $\overrightarrow{CD}$ en el $\angle BCC'$. El plano determinado por A, C y D, corta al plano de r y s en la recta AF. Como $\overrightarrow{CD}$ también pasa por F, lo que quiere decir que corta a s, resulta $t \parallel s$.

Corolario: si dos planos que contienen a rectas paralelas se cortan, su intersección es paralela a ellas.

Puede llevarse la idea del haz impropio a tres dimensiones, en cuyo caso en vez de haz hablamos de radiación. En el espacio todas las rectas paralelas a otra, en un sentido dado, comparten el sentido del paralelismo, o sea, un punto impropio.

Una recta r paralela a un plano π es paralela a todas las rectas s, t, u,... del haz impropio del plano, que se obtiene cortándolo con todos los planos que pasan por r. La recta r, las rectas del haz y el plano tienen en común un punto impropio Ω (Fig. 108).



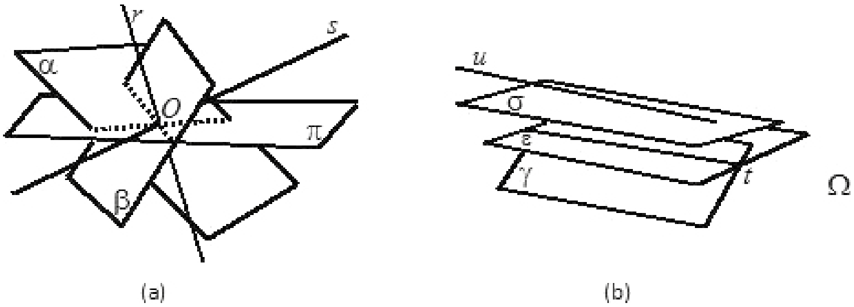
(Fig. 108)

Finalmente, por una recta (como *r*) paralela a un plano (como π) pasa un único plano paralelo al plano dado. Pero mejor será hablar de...

Radiaciones

Dado un punto propio *O* del espacio, el conjunto de todas las rectas y planos que pasan por él se denomina *radiación propia de centro O*. En la Fig. 109 (a) vemos una radiación propia de centro *O*; se muestran cuatro rectas (dos con línea punteada) y tres planos de la misma.

Si el punto dado es impropio, digamos Ω, todas las rectas y planos que pasan por él (es decir, todas las rectas y planos paralelos a una recta en un sentido dado), conforman una *radiación impropia de centro* Ω. En la Fig. 108 (b) tenemos una radiación de este tipo, de centro Ω, de los planos y rectas paralelos a *u*. Los planos de esta radiación pueden ser secantes, como ε y γ, siendo su intersección una recta *t* paralela a *u*.



(Fig. 109)

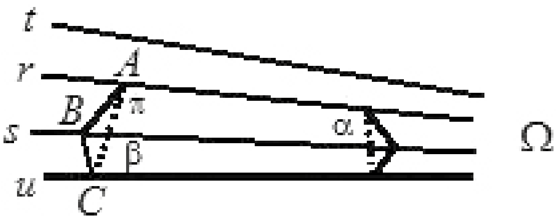
Los siguientes enunciados son válidos para ambas radiaciones:

1 - Por todo punto del espacio, distinto del centro, pasa una sola recta de la radiación.

2 - Por toda recta que no contiene al centro, pasa un solo plano de la radiación.

3 - La radiación queda determinada por dos de sus rectas o por una recta y un plano.

En la Fig. 110 se ven algunas rectas de una radiación impropia. Cada dos, determinan una faja. Se han destacado los siguientes planos: α que pasa por *r* y *s*; β, por *s* y *u*, y π, por *r* y *u*. Estos planos, de a pares, forman tres *diedros*. Los tres planos determinan un *triedro*. También vemos triláteros: *AB*Ω, *AC*Ω y *BC*Ω.



(Fig. 110)

Geometría de la radiación impropia

La geometría de la radiación impropia (GRI), tiene como objetos fundamentales las rectas y planos de dicha radiación. Así como en la geometría plana es el *plano* el ente donde se ubican los puntos y las rectas, en la GRI es la *radiación* el ente donde se asientan las rectas y los planos.

Cambiando ciertos términos en los axiomas y teoremas de la geometría plana euclidiana, se obtienen enunciados válidos en la GRI. Se establece, por lo tanto, un isomorfismo entre la geometría plana y la GRI. Véase la siguiente tabla "diccionario":

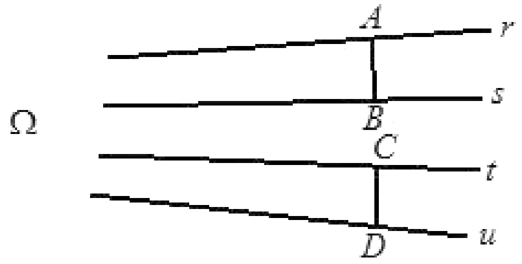
Geometría plana euclidiana	**Geometría de la radiación impropia**
Plano	*Radiación*
Punto	*Recta*
Recta	*Plano*
Segmento	*Faja*
Ángulo	*Diedro*
Triángulo	*Triedro*

A continuación se muestran ejemplos en los que se efectuó el cambio de términos, según la correspondencia que señala la tabla, lo que da lugar a proposiciones ciertas en la GRI.

Geometría plana euclidiana	**Geometría de la radiación impropia**
Por dos puntos *pasa una única* recta *del* plano.	*Por dos* rectas *pasa un único* plano *de la* radiación.
Por un punto *pasan infinitas* rectas *del* plano.	*Por una* recta *pasan infinitos* planos *de la* radiación[b].
Los puntos *de la* recta *pueden disponerse en dos ordenamientos naturales.*	*Las* rectas *del* plano *pueden disponerse en dos ordenamientos naturales.*
Una recta *del* plano *lo divide en dos regiones tales que dos* puntos *de distintas regiones (de la misma región) determinan un* segmento *que corta (no corta) a la* recta.	*Un* plano *de la* radiación *lo divide en dos regiones tales que dos* rectas *de distintas regiones (de la misma región) determinan una* faja *que corta (no corta) al* plano.

b Esta proposición corresponde al axioma del ordenamiento de puntos de una recta, adoptado en algunos sistemas.

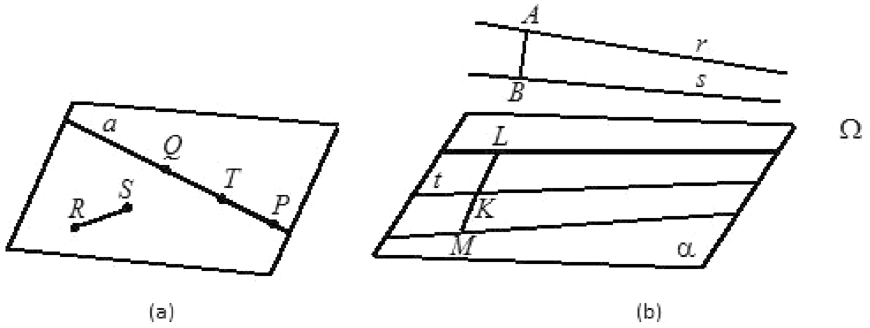
Para ilustrar más esto veamos con algún detalle la congruencia de fajas, que se corresponde con la congruencia de segmentos. En una radiación impropia de centro Ω consideremos las rectas *r*, *s*, *t* y *u*, que determinan las fajas (*rs*) y (*tu*) (Fig. 111).



(Fig. 111)

Sean *A* y *B* puntos sobre *r* y *s* respectivamente y, análogamente, *C* y *D* sobre *t* y *u*. Sean también $\angle\Omega AB = \angle\Omega BA$, $\angle\Omega CD = \angle\Omega DC$. Las fajas son congruentes si $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Con la convención mencionada de cambio de términos, la congruencia de fajas satisface las leyes de la congruencia de segmentos. Por ejemplo, consideremos este enunciado: *dados tres puntos de un plano: R, S, T, y una recta "a" que pase por T, hay en cada semirrecta que T determina en "a" un segmento de extremo T congruente con* $\overline{RS}$.Vemos estos objetos en la Fig. 112 (a), donde se tiene $\overline{TQ} = \overline{TP} = \overline{RS}$.



(Fig. 112)

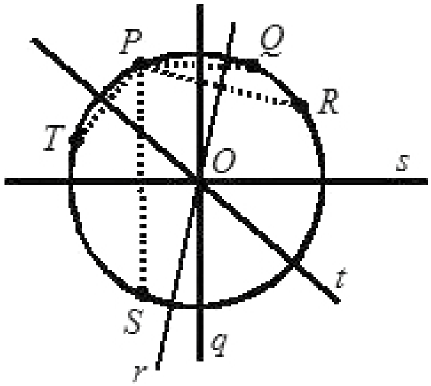
En el dominio de la GRI, esta afirmación se traduce como: dadas tres rectas de la radiación: *r, s, t,* y un plano α que pase por *t,* hay en cada semiplano que *t* determina sobre α una faja de borde *t* congruente con (*rs*). En la Fig. 112 (*b*) se muestran la faja (*rs*) y las dos de borde *t* congruentes con ella, puesto que $\overline{KL} = \overline{KM} = \overline{AB}$, tal como se definió antes.

Análogamente, se definen la adición y sustracción de zonas, cuyas propiedades se corresponden con las de la adición y la sustracción de segmentos, respectivamente. Y el primer criterio de congruencia de triángulos de la geometría plana, se liga en la GRI con el primer criterio de congruencia de triedros: *dos triedros son congruentes si tienen dos caras (fajas) y el diedro comprendido respectivamente congruentes.*

Circunferencia, oriciclo, esfera, orisfera

Vamos ahora a conocer una definición de circunferencia alejada de la habitual, que tiene como interesante ingrediente el hecho de que la curva se determina a partir de un punto cualquier *de ella*. Esto seguramente a más de uno le hará plantearse una pregunta filosófica: ¿generar una curva a partir de uno de sus puntos, pero cómo, si aún no se ha generado, contamos con uno de sus puntos como dato? Afortunadamente, somos matemáticos[10].

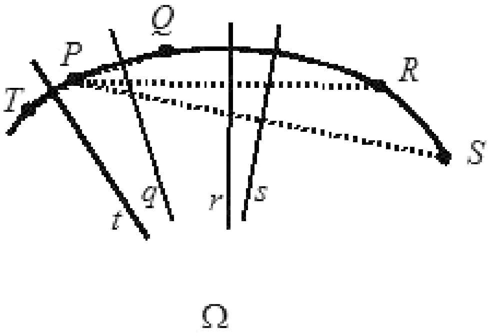
Considérese un haz de rectas propio de centro *O*, y un punto *P* cualquiera del plano, distinto de *O*. Se llama *circunferencia de centro O y radio* $\overline{OP}$, al conjunto de *todos* los puntos del plano simétricos de *P* respecto de cada una de las rectas del haz[11].



(Fig. 113) Circunferencia definida a partir de *P*.

En la Fig. 113 trazamos el punto *P* y las rectas *q*, *r*, *s* y *t*, del haz de centro *O*. Los puntos *Q*, *R*, *S* y *T*, son los simétricos de *P* respecto de esas rectas. Considerando las infinitas rectas del haz se obtiene la circunferencia completa. Las mediatrices de sus cuerdas se cortan en *O*, a distancia finita.

Si "mantenemos" la definición, mas refiriéndonos a un haz *impropio* de centro Ω, se obtiene una curva que denominamos *oriciclo*[12] (Fig. 114). Su radio $\overline{P\Omega}$ tiene longitud infinita. Las mediatrices de la cuerdas concurren en Ω.



(Fig. 114) Oriciclo definido a partir de *P*.

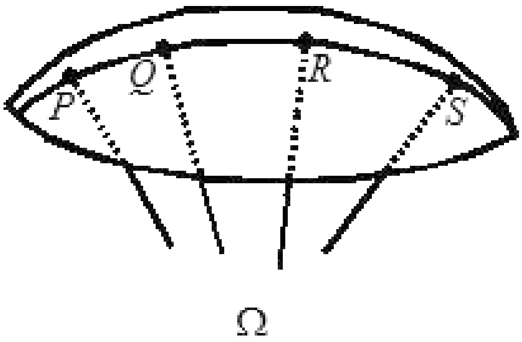
10 Permítaseme este toque de humor, y le dejo el problema a los amigos filósofos.

11 Se trata de una simetría axial. Recuérdese que también existe la simetría central.

12 En algunos textos figura *horiciclo* u *horociclo*.

Ahora pasemos al espacio. Con definición análoga a la de circunferencia, pero considerando una *radiación* propia en vez de un haz, resulta caracterizada la *superficie esférica*[13]. Podemos también definirla como la superficie de revolución generada por la rotación de la circunferencia en torno a uno de sus diámetros.

Finalmente, y también en el espacio, si cambiamos la radiación propia por una impropia, o bien si hacemos girar el oriciclo alrededor de uno de sus radios, queda definida la superficie que llamamos *orisfera* (Fig. 115).



(Fig. 115) La *orisfera*. Sobre ella, el oriciclo que pasa por *P*, *Q*, *R* y *S*.

El caso euclidiano

Hemos transitado hasta aquí una teoría del paralelismo general. Sus proposiciones son amplias en el sentido de que no abarcan una única posibilidad, tal como se dijo respecto del ángulo de paralelismo, que podría ser agudo *o* recto, o del ángulo exterior de un trilátero, que podría ser mayor *o* igual que el interno opuesto.

Ahora bien: asumiendo, posteriormente a esta teoría, el Postulado de paralelismo de Euclides o alguno equivalente a él, ciertas propiedades resultarán restringidas pues quedarán particularizadas, adoptando las características que exhiben en la geometría euclidiana. En concreto, se tendrá, por ejemplo:

- Las dos paralelas coinciden en una sola.

- El ángulo de paralelismo es recto.

- La distancia entre dos paralelas es constante, y el enunciado *"a distancias de paralelismo iguales corresponden ángulos de paralelismo iguales"* se mantiene válido pero de manera trivial, ya que el ángulo de paralelismo también es constante. Se ve con claridad por qué no es verdadero el recíproco de ese

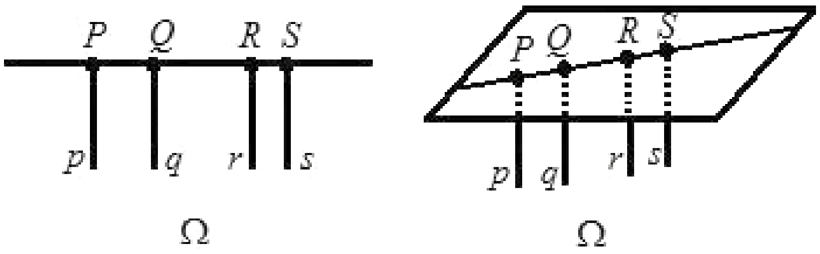
13 Así como circunferencia y círculo son objetos diferentes, no debe confundirse superficie esférica con esfera, aunque a veces por abuso de lenguaje o porque el contexto nos exime de confusiones, llamamos esfera a su superficie (tal como en el título de esta sección). Podemos también distinguir entre orisfera y superficie orisférica.

enunciado en el caso general; en efecto, si a ángulos iguales correspondieran distancias iguales, las distancias entre *todas* las paralelas sería la misma.

- Los sentidos de paralelismo se reducen a un único sentido.

- El ángulo exterior de un trilátero es igual al interno opuesto.

Para el caso euclidiano también obtenemos curiosas interpretaciones de la recta y el plano, en relación con el oriciclo y la orisfera. En efecto, aplicando la definición de oriciclo en un haz impropio euclidiano resulta una *recta*. Y la definición de orisfera en una radiación impropia euclidiana nos conduce a un *plano*. Compárese la Fig. 116 con las Figuras 114 y 115, para el caso euclidiano.

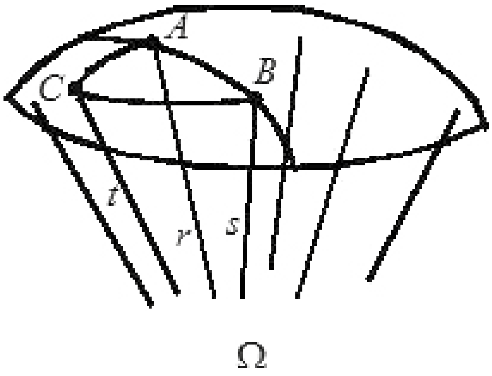


(Fig. 116) El oriciclo y la orisfera en el caso euclidiano.

El oriciclo y la orisfera pueden ser vistos como límites respectivos de circunferencia y esfera, cuando el radio tiende a infinito. En el caso euclidiano, la recta y el plano serían la circunferencia y la superficie esférica de radio infinito.

La geometría de la orisfera

Es posible establecer una relación biunívoca entre cada punto de una orisfera de centro Ω y la recta que lo une con este punto impropio[14]. Este vínculo entre orisfera y radiación impropia genera las siguientes correspondencias entre objetos (Fig. 117):



(Fig. 117) Orisfera y radiación impropia.

14 Se puede decir “la recta que lo proyecta desde Ω”.

- A cada *recta* de la radiación (por ejemplo, $A\Omega$) le corresponde un *punto* (A), y recíprocamente.

- A cada *plano* (como $AB\Omega$), un *oriciclo* (AB).

- A cada faja [digamos (rs)], un segmento oricíclico $(\overline{AB})$.

- A cada *diedro* (como el trs, de arista r), un *ángulo oricíclico* ($\angle CAB$).

- A cada *triedro* [digamos el de caras (rs), (st) y (tr)], un *triángulo oricíclico* (ABC).

Esta notable correspondencia nos permite enunciar proposiciones de la geometría en la orisfera, a partir de otras de la radiación impropia. Por ejemplo:

Geometría de la radiación	**Geometría de la orisfera**
Dos rectas de la radiación pertenecen a un único plano.	*Dos puntos de la orisfera pertenecen a un único oriciclo.*
Las rectas de la radiación que están en un plano pueden ordenarse según dos ordenamienos naturales.	*Los puntos de un oriciclo pueden ordenarse según dos ordenamientos naturales.*
Un plano de la radiación divide a esta en dos regiones, de modo que dos rectas de regiones distintas determinan un plano que corta a aquél, y dos rectas de una misma región determinan un plano que no corta a aquel plano.	*Un oriciclo divide a la orisfera en dos regiones, de manera que dos puntos de regiones distintas determinan un segmento oricíclico que corta a aquél, y dos puntos de una misma región determinan un segmento oricíclico que no corta a aquel oriciclo*[c].

Sobre la congruencia en la orifera, diremos que dos segmentos, ángulos o triángulos oricíclicos, son congruentes, si lo son sus correspondientes fajas, diedros o triedros.

En relación con el paralelismo, dos oriciclos son *paralelos* si no tienen un punto en común. Analicemos ahora la siguiente tabla.

Geometría plana euclidiana	**Geometría de la radiación impropia**	**Geometría orisférica**
Por un punto *exterior a una* recta *pasa una única* recta *paralela a ella.*	*Por una* recta *que no corta a un* plano *pasa un único* plano *paralelo a él.*	*Por un* punto *exterior a un* oriciclo *pasa un único* oriciclo *paralelo a él.*

Esto nos está mostrando una completa analogía entre las tres geometrías. En particular, la trigonometría ordinaria del plano euclidiano es válida en la orisfera. Aquí se nos ilustra sobre la posibilidad de interpretar de diversas maneras los entes primitivos (véase cap. 5, pág. 77) y de construir diferentes modelos para un mismo conjunto de axiomas.

c Esta es la versión orisférica del axioma de la separación del plano por una de sus rectas.

La opción por una geometría

Luego de la teoría general del paralelismo que se ha esbozado brevemente, el desarrollo de la geometría prosigue con la adopción libre de algún postulado de paralelismo.

Eligiendo el *postulado de paralelismo de Euclides* que, en la versión de Playfair, es: *por un punto exterior a una recta pasa en su plano una única paralela a ella*, resultará la geometría euclidiana o *parabólica*. Como dijimos antes, nuestras dos paralelas del comienzo de este tema se convertirán en una sola, el ángulo de paralelismo será recto, el ángulo exterior del trilátero será igual al interno opuesto y las paralelas serán equidistantes.

Adoptando el *postulado de Lobachevski: por un punto exterior a una recta pasan en su plano exactamente dos paralelas a ella*, se obtendrá la geometría hiperbólica, o de Gauss, Lobachevski y Bolyai. Las dos paralelas del inicio serán precisamente dos, el ángulo de paralelismo será agudo y las paralelas tendrán un comportamiento asintótico.

Una tercera posibilidad es negar la existencia de paralelas, es decir, si se asume que *todas las rectas de un plano se cortan entre sí*, se habrá admitido el postulado de Riemann y se accederá a la geometría elíptica o de Riemann. Los ángulos de los triángulos sumarán más de dos rectos, las rectas serán finitas en extensión y no será única la perpendicular a una recta por un punto.

[Capítulo 10]

Breve paseo por la geometría hiperbólica (o de Gauss, Lobachevski y Bolyai... y Saccheri)

Unos pocos detalles históricos

> ... he descubierto cosas tan hermosas, que me he quedado sorprendido con ellas y se debería lamentar por siempre que se hubiesen perdido. Cuando las veáis, lo reconoceréis vos mismo. Entre tanto no puedo decir más que esto: he creado de la nada un nuevo universo (Bonola, 1945: 103)[1].

Son abundantes los pormenores históricos de la gestación y desarrollo de las geometrías no euclidianas y no me ocuparé aquí de ellos. Sin embargo, no estará de más comentar unos pocos detalles[2].

En 1792 Gauss inició unas reflexiones sobre el problema del Postulado, e intentó demostrarlo a partir de suponer su falsedad. En una primera etapa de vacilación sobre lo que estaba "viendo", escribió en 1799 una carta a W. Bolyai, donde afirmó:

> ... mis trabajos están ya muy adelantados; pero el camino por el que he penetrado no conduce al fin que se persigue..., sino que más bien conduce a poner en duda la existencia de la Geometría. He llegado, es verdad, a muchas cosas, que para la mayoría de los hombres constituirían una demostración válida; pero que, en mi opinión, no prueban, por decirlo así, NADA... (Bonola, 1945: 76).

No obstante, a partir de 1813, en una segunda etapa donde ya se había convencido de la existencia de una nueva geometría, comenzó Gauss a desarrollar teoremas, sin publicar nada del asunto por temor al "griterío de los beocios"[3].

---

1 J. Bolyai, carta a su padre del 3 de noviembre de 1823.

2 Seguiremos aquí a (Bonola, 1945: cap. III). Aunque en un modo divulgativo, este libro trata minuciosamente el origen y avance de las geometrías no euclidianas.

3 Es decir, la incomprensión y protesta de quienes no aceptarían los extraños resultados obtenidos. Es curioso el origen de la palabra "beocio", que significa "ignorante, estúpido, tonto", pero también "natural de Beocia; perteneciente o relativo a esta región de la Grecia antigua" (DLE), ¡porque los griegos trataban de tontos a los habitantes de Beocia! Sucede lo mismo con el vocablo "lacónico", en relación con los habitantes de la región de Laconia, caracterizados por su parquedad en el hablar.

> Hace algunas semanas [en 1831] he comenzado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que se remontan en parte a cuarenta años, y de las cuales nada había redactado, lo que me ha obligado tres o cuatro veces a empezar de nuevo toda la labor en mi cabeza. No quisiera, sin embargo, que todo esto pereciese conmigo (Bonola, 1945: 78)[4].

Por razones que no cabe explicar aquí, Gauss denominó a la nueva rama "geometría anti-euclidiana", luego "astral" y finalmente "no euclidiana".

De manera independiente, el ruso Nicolás Ivanovich Lobachevski, en 1815 ya estaba trabajando sobre el problema de demostrar el axioma de las paralelas. Luego, hacia 1823, comenzó a desarrollar una geometría independiente de él. Después de varias obras previas, tales como *Geometría imaginaria* (1835), *Nuevos fundamentos de la Geometría con una completa teoría de las paralelas* (1835-1838), y otras,

> en 1855, un año antes de su muerte, ya ciego, dictó y publicó, en lengua rusa y francesa, una exposición completa de su sistema geométrico bajo el título "Pangeometría o tratado de Geometría basado en una teoría general y rigurosa de las paralelas" (Bonola, 1945: 92).

El tercer matemático involucrado en el desarrollo inicial de la geometría hiperbólica, János Bolyai, se ocupó de la teoría de las paralelas entre 1817 y 1822, durante su permanencia en la Real Academia de Ingenieros en Viena. A partir de 1823 profundizó sus investigaciones y en 1831 publicó, como apéndice de una obra de su padre, su *Ciencia absoluta del espacio*[5]. Este trabajo fue enviado a Gauss por Wolfgang Bolyai, quien recibió esta sorprendente respuesta:

> Si empiezo diciendo que no puedo elogiar este trabajo, tu quedarás, ciertamente, por un instante maravillado; pero no puedo decir otra cosa; alabarlo sería alabarme a mí mismo. En efecto, todo el contenido de la obra, el camino trazado por tu hijo, los resultados a que llegó, coinciden casi enteramente con mis meditaciones, que han ocupado en parte mi mente de treinta a treinta y cinco años a esta parte. Así, me quedé completamente estupefacto. En cuanto a mi trabajo personal, del cual, hasta aquí, he confiado bien poco al papel, era mi intención no dejar que se publicase nada durante mi vida. En efecto, la mayor parte de los hombres no tienen ideas claras sobre las cuestiones de que se habla, y yo me he encontrado muy pocas personas que prestasen un especial interés a lo que les comuniqué sobre tal asunto. Para poder tener este interés se necesita ante todo haber sentido muy vivamente lo que esencialmente falta, y sobre esta materia casi todos están en una completa oscuridad. Al contrario, era mi idea escribir, con el tiempo, todo esto, para que al menos no pereciese conmigo. Y así es para mí una agradable sorpresa ver que esta fatiga puede serme evitada ahora, y estoy sumamente contento de que sea precisamente el hijo de mi viejo amigo quien me haya precedido de un modo tan notable (Bonola, 1945: 104).

Es comprensible que esto no le cayó muy bien a János, quien siempre consideró poco simpático al *Princeps Matematicorum*[6].

---

4 De una carta de Gauss al astrónomo y matemático alemán Heinrich C. Schumacher (1780-1850).

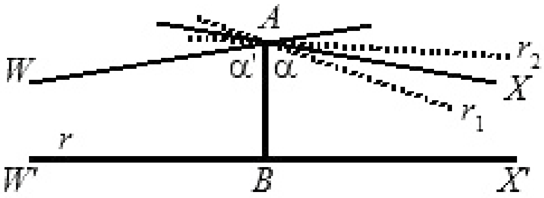
5 El extenso título completo en latín (al antiguo estilo) es: *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica* (Bonola, 1945: 104). Nótese la referencia al Postulado V como Axioma XI, ya que así figuraba en algunas ediciones de *Elementos.*

6 Véase la nota 2 del cap. 9.

El paralelismo hiperbólico

Se dijo que una vía de entrada a la geometría hiperbólica es la aceptación del axioma de Lobachevski: *por un punto exterior a una recta pasan en su plano exactamente dos paralelas a ella* (véase cap. 9, pág. 174).

No es la única manera de acceder. Admitiendo cualquier postulado equivalente al citado, nos metemos en esa especialidad, como le pasó a Saccheri quien, sin saberlo, comenzó a "hacer geometría hiperbólica" con la adopción de la hipótesis del ángulo agudo, que bien podríamos llamar "postulado de Saccheri".



(Fig. 118)

La Fig. 118 muestra las dos paralelas, *AX* y *AW*, a una recta *r*. Recuérdese el sentido del paralelismo, por lo que escribimos *AX // BX'* y no *AX // X'B* ni *XA // BX'*. También, *AW // BW'*.

Al estar prohibido por el axioma que las paralelas coincidan, resulta que los ángulos de paralelismo $\angle BAX = \alpha$ y $\angle BAW = \alpha'$ son necesariamente *agudos*. Un ángulo de paralelismo aquí no puede ser obtuso pues habría una semirrecta interior a él (como la perpendicular a *AB* por *A*), que *no* cortaría a *r*, violando la condición necesaria y suficiente de paralelismo, expuesta en el cap. 9, pág. 158. Toda recta como r_1, interior al ángulo de paralelismo[7], corta necesariamente a *r*. Por otra parte, rectas como r_2 no encuentran a *r*. Llamaremos a r_2 *ultraparalela* a *r*[8]. Ya que por un punto pasan dos paralelas a una recta *r* dada, hay dos haces impropios distintos a los que pertenecen, respectivamente, *r* y cada una de sus paralelas.

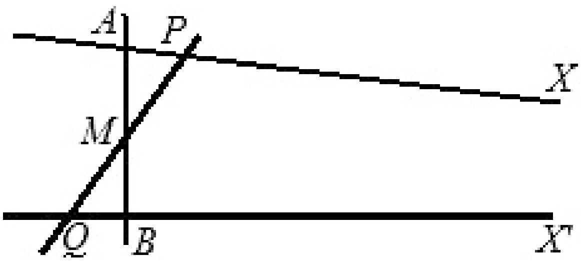
Mientras que la recta euclidiana tiene *un* punto impropio o punto en el infinito (por tener un único sentido de paralelismo), la recta hiperbólica tiene *dos* puntos impropios.

Dos teoremas vinculados con paralelas se exponen a continuación:

Teorema: si dos paralelas *AX, BX'* son cortadas por una transversal *PQ,* los ángulos conjugados internos suman menos de 2R.

7 Es un abuso de lenguaje. En rigor solamente una parte de dicha recta es interior al ángulo.

8 En algunos textos se llama paralelas a todas las rectas que no cortan a *r* (infinitas) y *paralela crítica* a *AX*. En otros, se llama *paralelas divergentes* a las primeras y *convergentes* a las segundas.



(Fig. 119)

Demostración: (Fig. 119) nótese que si uno de los ángulos conjugados internos es recto, el otro es ángulo de paralelismo, siendo obligatorio que sea agudo. En este caso la suma de ambos es menor que 2R.

Supongamos ahora una transversal cualquiera *PQ* y que

$\angle QPX + \angle PQX' = 2R.$

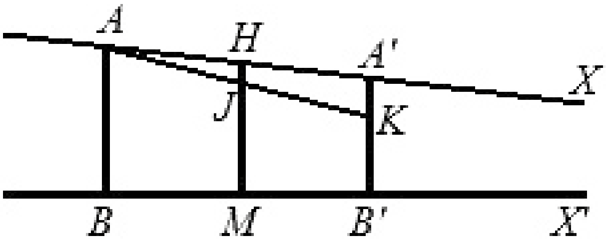
Sea *M* el punto medio de $\overline{PQ}$. Por *M* se traza $MB \perp BX'$, que corta a *PX* en *A*. El ángulo $\angle MQB$ es igual al $\angle APM$, por tener el mismo suplemento $\angle MPX$. De aquí resulta, por criterio ALA, que los triángulos *APM* y *MBQ* son congruentes. Luego se tiene que $\angle MAP = \angle MBQ = 1R$: absurdo pues $\angle MAP$ es agudo por ser ángulo de paralelismo.

Luego $\angle QPX + \angle PQX' < 2R.$

Una importante consecuencia de este teorema es:

Corolario: las paralelas hiperbólicas no admiten perpendicular común.

Teorema: la distancia entre paralelas decrece en el sentido del paralelismo. (Las paralelas se aproximan asintóticamente entre sí).



(Fig. 120)

Demostración: En la Fig. 120 sean *AX // BX'*, con el sentido de paralelismo hacia la derecha. Se trazan los segmentos $\overline{AB} \perp BX'$ y $\overline{A'B'} \perp BX'$.

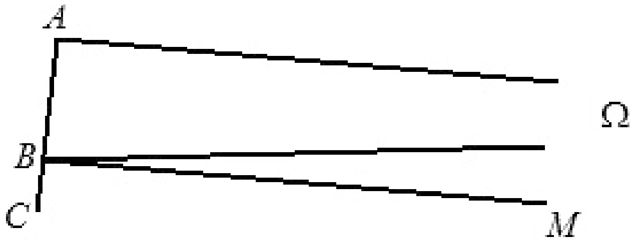
Si $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ el cuadrilátero *ABB'A'* es birrectángulo isósceles y podemos recurrir sorprendentemente a las Proposiciones I y II de Saccheri (véase cap. 8, pág. 131), concluyendo que existe un segmento $\overline{HM}$ perpendicular a ambas paralelas[9], lo que contradice el corolario del teorema anterior.

9 Recuérdese que tanto *M* como *H* son puntos medios de las bases del cuadrilátero.

Si $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ existe K en $\overline{A'B'}$ tal que $\overline{AB} = \overline{KB'}$. Por el mismo razonamiento anterior hay ahora un segmento $\overline{JM}$ perpendicular a *BX'* y a *AK* (de $\overline{AK}$ J es punto medio), pero entonces *AK* no cortaría a *BX'* (pues dos perpendiculares a una misma recta no se encuentran). Esto contradice que *AK* debe cortar a *BX'* por ser *AX* // *BX'*. Listo.

Triláteros

Teorema: un ángulo exterior de un trilátero es mayor que el ángulo interno opuesto[10].



(Fig. 121)

Demostración: (Fig. 121). En el trilátero $AB\Omega$ sea el ángulo exterior $\angle CB\Omega$.

Trazamos $\overrightarrow{BM}$ tal que $\angle CBM = \angle BA\Omega$. Como estos son ángulos correspondientes respecto de *AB*, iguales, las rectas $A\Omega$ y *BM* no se cortan (Euclides I.28)[11]. Esto implica que determinan con *AB* ángulos conjugados suplementarios y de aquí resulta que $\overrightarrow{BM}$ será interior al $\angle CB\Omega$.

Luego $\angle BA\Omega = \angle CBM < \angle CB\Omega$.

Otra demostración, más simple, es la siguiente:

$\angle BA\Omega + \angle AB\Omega < 2R$ (ya demostrado) y

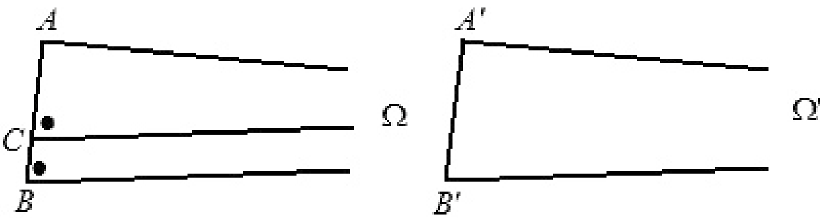
$\angle CB\Omega + \angle AB\Omega = 2R$ por ser adyacentes. De estas dos relaciones resulta que $\angle BA\Omega < \angle CB\Omega$.

El teorema también se cumple para los ángulos exteriores cuyo interior opuesto es el ángulo nulo de vértice Ω.

Teorema: si dos triláteros tienen congruentes sus ángulos propios, son congruentes.

10 En algunos textos los triláteros hiperbólicos son llamados *triángulos asintóticos.*

11 Las proposiciones de Euclides I.27 y I.28 sobre rectas coplanares que no se encuentran cuando, al ser cortadas por una transversal, forman ángulos alternos congruentes, correspondientes congruentes o conjugados suplementarios, son independientes del Postulado V de paralelismo. Recuérdese que el alejandrino recién apela al Postulado V en I.29.



(Fig. 122)

Demostración: (Fig. 122). Sean los triláteros $AB\Omega$ y $A'B'\Omega'$.

Si $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$, solo falta demostrar que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ para que los triláteros resulten congruentes (véase cap. 9, pág. 166, teorema 4).

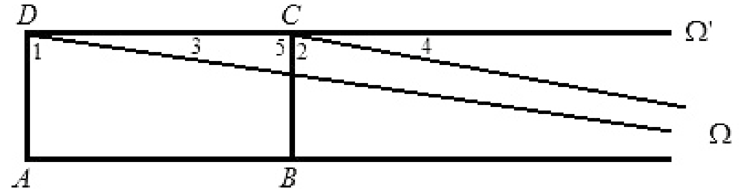
Supóngase que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$. Se toma en $\overline{AB}$ un punto C tal que $\overline{AC} = \overline{A'B'}$, y se une C con Ω. Resulta así el trilátero $AC\Omega$, congruente con el $A'B'\Omega$. De esta congruencia surge que $\angle AC\Omega = \hat{B}'$. Pero $\hat{B}' = \hat{B}$, por hipótesis; resulta entonces $\angle AC\Omega = \hat{B}$ (en la figura hemos marcado estos ángulos con puntos). Y ahora ¡atención! Esto implica que en el trilátero $BC\Omega$ se tiene un ángulo exterior igual al interno opuesto, lo que entra en conflicto con el teorema anterior. Luego no es cierto que $\overline{AB} > \overline{A'B'}$.

Análogamente se razona para el caso $\overline{AB} < \overline{A'B'}$ y el teorema queda demostrado.

Regreso a los cuadriláteros birrectángulos isósceles

Siempre les digo a mis alumnos que, al llegar a este punto, van a contemplar la belleza de la matemática, expresada, esta vez, en su coherencia interna. Los invito a estudiar atentamente el teorema siguiente:

Teorema: sea $ABCD$ un cuadrilátero birrectángulo isósceles, con $\hat{A}$ y $\hat{B}$ rectos y $\overline{AD} = \overline{BC}$. Los ángulos $\hat{C}$ y $\hat{D}$ son iguales y agudos.



(Fig. 123) La HAA demostrada

Demostración: (Fig. 123). No nos detendremos a demostrar $\hat{C} = \hat{D}$, ya que esta prueba está en el teorema de Saccheri, Proposición I (véase cap. 8, pág. 131).

Construimos los triláteros $AD\Omega$ y $BC\Omega$ (esto podría decirse también así: trazamos por D y C las paralelas a AB en el sentido de A a B). Estos triláteros rectángulos son congruentes ya que $\hat{1} = \hat{2}$, por ser ángulos de paralelismo correspondiente a las distancias iguales $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

Unimos C con el punto impropio Ω' de DC en el sentido DC. Nótese que como DC *no* es paralela a AB, los puntos impropios "hacia la derecha" son distintos.

Nos enfocamos ahora en el trilátero $DC\Omega$ (el delgadito). Tenemos que $\hat{4} > \hat{3}$, por ser ángulo exterior. Luego $\hat{1} + \hat{3} < \hat{2} + \hat{4}$. Pero de la primera parte de este teorema es $\hat{1} + \hat{3} = \hat{5}$, por lo tanto, $\hat{5} < \hat{2} + \hat{4}$ (*).

$\hat{5}$ y $\left(\hat{2} + \hat{4}\right)$ son adyacentes y por lo tanto suplementarios. Entonces de (*) surge que $\hat{5}$ debe ser agudo, al igual que su compañero, congruente con él, $\left(\hat{1} + \hat{3}\right)$.

Como dije al principio de esta sección, tenemos aquí "en vivo", un toque de belleza matemática. Me refiero a lo siguiente:

- Al estudiar la obra de G. Saccheri vimos cómo él, *asumiendo* la hipótesis del ángulo agudo, o sea aceptando sin demostración que los ángulos no rectos del cuadrilátero birrectángulo isósceles son agudos (postulado de Saccheri), obtuvo como consecuencia la *existencia de las rectas asintóticas,* es decir, las paralelas hiperbólicas.

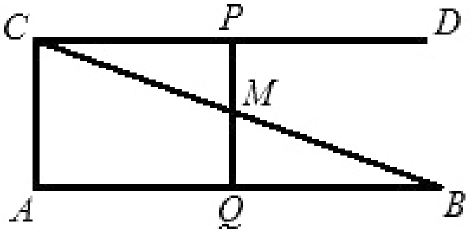
- Nosotros, en esta parte de nuestro itinerario procedimos a la inversa. *Asumimos* el postulado de Lobachevski, referido naturalmente a las rectas asintóticas, para obtener como consecuencia que en un cuadrilátero birrectángulo isósceles *los ángulos no rectos son agudos.*

Esto deja expuesto y aclarado admirablemente lo ya dicho sobre un enunciado matemático: que puede ser axioma o teorema, según el ordenamiento dado al sistema axiomático, a la teoría. Una sutil belleza. Valen la pena el esfuerzo y el estudio que nos permiten degustarla.

Un corolario del teorema anterior, que no demostraremos, es que *en un cuadrilátero trirrectángulo, el cuarto ángulo es agudo.*

Suma de ángulos de triángulos y polígonos

Teorema: en un triángulo rectángulo la suma de los ángulos interiores es menor que dos rectos.



(Fig. 124)

Demostración: (Fig. 124). El triángulo *BAC* es rectángulo en *A*. Se construye el $\angle BCD = \angle ABC$. Por el punto medio *M* de $\overline{BC}$ se dibuja $\overline{PQ} \perp AB$.

Los triángulos *CPM* y *BQM* son congruentes por criterio ALA; de aquí resulta que $\angle CPQ$ = 1R y que el *AQPC* es trirrectángulo, con el ángulo en *C* agudo, por el corolario del teorema anterior.

Por lo tanto, en el *BAC* tenemos:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 1R + \angle ABC + \angle ACB = 1R + \angle BCD + \angle ACB = 1R + \hat{C}$ (del *AQPC*) < 2R.

Como cualquier triángulo puede dividirse en triángulos rectángulos, se generaliza este resultado a todos los triángulos. Esto, a su vez, provoca que

$S_i < 2R(n - 2)$ y $S_e > 4R$.

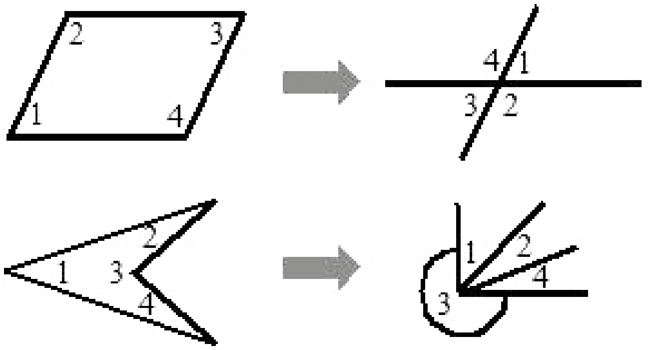
siendo S_i (S_e) la suma de ángulos interiores (exteriores) de un polígono de n lados.

Digresión al paso: Suma de ángulos de polígonos

Traigo a colación aquí un asunto elemental no siempre tratado con algún detalle en la geometría elemental, referido a la suma de los ángulos, interiores o exteriores, de un polígono. Por lo general el análisis se limita a los polígonos convexos. Para ellos no hay mucho que decir, porque si son n sus lados se tiene que $S_i = 2R(n - 2)$ (n = número natural mayor que 2) y $S_e = 4R$. (Me mantendré en la geometría euclidiana porque en este comentario no es esencial en cuál geometría nos ubiquemos).

Hagamos una pregunta: ¿cómo deben "pensarse" esas sumas de ángulos? Una manera es hacerlo "gráficamente", o sea, adicionando ángulos consecutivos en un dibujo. Otro modo es concebirlas "algebraicamente", es decir sumando amplitudes o valores angulares. Veremos que esta última interpretación es la más coherente y general.

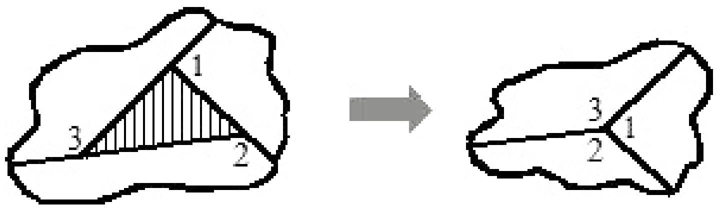
La fórmula $S_i = 2R(n - 2)$ puede usarse desde $n = 3$ para polígonos convexos y desde $n = 4$ para cóncavos, arrojando infinitos valores para los infinitos valores de n. Sin embargo, pensando en una suma de ángulos consecutivos construida en un papel, solo es posible graficar hasta el caso $n = 4$ ($S_i = 4R = 360°$) para polígonos convexos o cóncavos, pues el plano se completa con 360° y no es factible construir un ángulo de amplitud mayor[12]. Véase la Fig. 125, donde se suman de esta manera los ángulos interiores de dos cuadriláteros, uno convexo y otro cóncavo.



(Fig. 125)

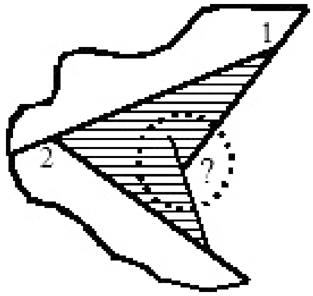
12 No incluyo en esta discusión los ángulos tal como son concebidos en trigonometría, con amplitudes (positivas o negativas) que pueden tomar cualquier valor real. En este contexto un ángulo mayor a 360° tiene más de "un giro" en sentido positivo (antihorario).

Respecto de las sumas de ángulos exteriores, al ser igual a 4R, como indica la fórmula euclidiana, debería poder cubrirse el plano con los ángulos exteriores dibujados consecutivamente. Mas esto solo es cierto para los polígonos *convexos* (Fig. 126). He destacado los ángulos como porciones de plano y le agregué un borde ondulado para reforzar esta idea y ver claramente cómo se cubre todo el plano.



(Fig. 126)

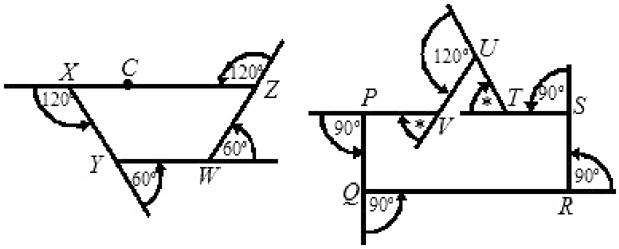
Nótese ahora en la Fig. 127 que no es posible hacer esto en un polígono cóncavo. En efecto, en la zona del ángulo cóncavo no se puede trazar el ángulo exterior con igual criterio con que se dibujaron los otros (fíjese bien usted) y no se comprende bien entonces qué significa que $S_e = 4R$.



(Fig. 127)

Las particularidades puestas aquí en evidencia pueden evitarse y cobran sentido si, con más generalidad, consideramos ángulos *orientados* y con posibilidad de que su suma mida *más de* 360° (= un giro = 4R), tal como se los asume en la trigonometría. Recuérdese que los ángulos cuyo sentido es horario (es decir, coincidente con el movimiento de las agujas del reloj[13]) se consideran negativos, y positivos, naturalmente, los de sentido contrario.

El ángulo exterior en un vértice se define como “el adyacente del interior correspondiente a dicho vértice”. Por ende, resulta que los ángulos interior y exterior son suplementarios. Esto se mantiene para los ángulos cóncavos porque, aunque su amplitud supera a 180°, sus adyacentes son *negativos* y la suplementariedad se conserva. Veamos unos ejemplos simples con ángulos “fáciles de ver” en la Fig. 128.



(Fig. 128)

13 ¡Siempre y cuando el reloj tenga agujas!

En el trapecio *XYWZ*, la S_e es la de cuatro ángulos positivos, con resultado 360°. Los ángulos interiores también son todos positivos (no se dibujaron los arcos) y S_i = 360°. En el heptágono cóncavo *PQRSTUV* (se han marcado con asterisco dos ángulos de –60°) tenemos que

S_e = 90° + 90° + 90° + 90° + (–60°) + 120° + (–60°) = 360° y

S_i = 90° + 90° + 90° + 90° + 240° + 60° + 240° = 900°[14].

este último valor coincide con el que arroja la fórmula 2R(*n* – 2) con *n* = 7.

Nótese que el arco orientado del ángulo, a fin de determinar su signo, va siempre desde la prolongación del lado del polígono hasta el otro lado del mismo, que determina el ángulo. Así, queda bien sentado que los adyacentes de los ángulos cóncavos son negativos.

Una comparación intuitiva, útil incluso para evocar en la enseñanza de este tema, es la siguiente: considérese una manzana de una ciudad, que tiene la forma del trapecio *XYWZ* de la Fig. 128. La letra *C* representa una casa, de la cual sale un señor para caminar y completar la vuelta completa a la manzana. ¿Cuál es el ángulo total que describe desde que parte hasta su llegada? Supongamos que sale de *C* hacia *X*. En su posición inicial el señor mira hacia *X*. Camina entonces por la vereda $\overline{CX}$ hasta llegar a *X*, entonces gira 120°. Continúa por $\overline{XY}$ hasta *Y* y en esa esquina gira 60°. Luego toma la vereda $\overline{YW}$ hasta *W*, gira otros 60°, recorre $\overline{WZ}$ hasta alcanzar *Z*, gira 120° y, finalmente, llega por $\overline{ZC}$ hasta su casa. Nótese que el caminante quedó en idéntica posición a la que tenía cuando partió, es decir, mirando hacia *X*. Esto equivale a haber girado 360°, y este valor es, en efecto, la suma de los ángulos exteriores según los cuales él fue rotando en su recorrido. Se comprende fácilmente que esta conclusión es independiente de la forma poligonal de la manzana (convexa o cóncava) y de la cantidad de lados-vereda que tenga.

El defecto o deficiencia angular de un polígono

Luego del reciente recreo angular euclidiano volvamos a la geometría hiperbólica. Dado que en un polígono convexo de *n* lados es $S_i < 2\mathrm{R}(n-2)$, la diferencia

$$\delta = 2\mathrm{R}(n-2) - S_i$$

es un número *positivo* que recibe el nombre de *defecto angular* (o *deficiencia angular*) del polígono. Además de la característica mencionada de ser $\delta > 0$, el defecto posee otra llamativa propiedad que pasaremos a ver en seguida.

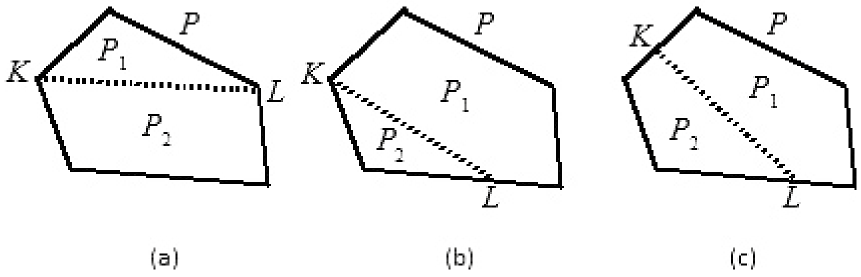
Sea *P* un polígono; dividámoslo mediante un segmento $\overline{KL}$ en dos polígonos P_1 y P_2 tales que $P_1 \cup P_2 = P$ y que $P_1 \cap P_2 = \overline{KL}$. Hay tres maneras de hacer esta división, según que (Fig. 129):

a) *K* y *L* sean dos vértices no consecutivos de *P*;

14 El valor del ángulo interior cóncavo en *T* proviene del cálculo 180° – (–60°) = 240°. Los ángulos de 240° y –60° son suplementarios.

b) K sea un vértice y L un punto de un lado que no contenga a K;

c) K y L sean dos puntos (no vértices) de dos lados cualesquiera.



(Fig. 129)

Teorema: la suma de los defectos de los polígonos-parte es igual al defecto del polígono completo.

Demostración: sean S_i , S_1 y S_2, las sumas de ángulos interiores de P, P_1 y P_2, respectivamente. Además, sean n, n_1 y n_2, el número de lados de esos polígonos. Entonces sus deficiencias respectivas, δ, δ_1, y δ_2, son:

$\delta = 2\mathrm{R}(n - 2) - S_i$, (1)

$\delta_1 = 2\mathrm{R}(n_1 - 2) - S_1$, (2)

$\delta_2 = 2\mathrm{R}(n_2 - 2) - S_2$. (3)

Sumando miembro a miembro (2) y (3) obtenemos:

$\delta_1 + \delta_2 = 2\mathrm{R}(n_1 - 2) - S_1 + 2\mathrm{R}(n_2 - 2) - S_2 = 2\mathrm{R}(n_1 + n_2 - 4) - (S_1 + S_2)$. (4)

Observamos ahora, en la situación (a) de la Fig. 129 que:

- $n_1 + n_2 = n + 2$ (pues contamos el lado $\overline{KL}$ dos veces).

- $S_1 + S_2 = S_i$.

Reemplazando estas igualdades en (4) nos da:

$\delta_1 + \delta_2 = 2\mathrm{R}(n + 2 - 4) - S_i = 2\mathrm{R}(n - 2) - S_i = \delta$.

En la situación (b) se tiene:

- $n_1 + n_2 = n + 3$,

- $S_1 + S_2 = S_i + 2\mathrm{R}$ (nótese que se adicionó un par de ángulos adyacentes de vértice L).

Nuevamente, si reemplazamos en (4):

$\delta_1 + \delta_2 = 2\mathrm{R}(n + 3 - 4) - (S_i + 2\mathrm{R}) = 2\mathrm{R}(n - 1) - S_i - 2\mathrm{R} = 2\mathrm{R}(n - 2) - S_i = \delta$.

Finalmente, en (c) tenemos:

- $n_1 + n_2 = n + 4$,

- $S_1 + S_2 = S_i + 4R$

Y en (4):

$$\delta_1 + \delta_2 = 2R(n + 4 - 4) - (S_i + 4R) = 2Rn - S_i - 4R = 2R(n - 2) - S_i = \delta.$$

El teorema queda, por lo tanto, demostrado. En seguida veremos una importante consecuencia de este teorema.

La función de área y el defecto angular como área

Durante nuestra formación matemática elemental, el área de las figuras es un concepto que asumimos natural e intuitivamente, sin hacernos demasiadas preguntas. A veces dudamos sobre la diferencia entre *área* y *superficie*[15]. Sin embargo, es un tema que tiene su fundamentación[16].

Podemos pensar en el área como una *función* A establecida entre un conjunto $\mathfrak{R}$ de regiones y el conjunto R de los números reales,

$A : \mathfrak{R} \rightarrow R$,

que cumple con estos dos importantes requisitos:

- Sea $G \subset \mathfrak{R}$ una región, entonces $A(G) > 0$. Es decir que la función le asigna a cualquier región un número positivo que para nosotros es el área de G.

- Si una región $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_k$, con G_i ($i = 1, \ldots, k$) regiones disjuntas entre sí, o que solo comparten partes de sus bordes, entonces $A(G) = A(G_1) + A(G_2) + \ldots + A(G_k)$. Esta es la propiedad de *aditividad del área*: el área de una figura es igual a la suma de las áreas de las partes que la conforman.

Cualquier función que cumpla estas condiciones puede usarse para definir el área. Estos requisitos son satisfechos por la deficiencia angular, como se vio anteriormente en este capítulo. Luego, en la geometría hiperbólica podemos adoptar para una región poligonal convexa G, cuya deficiencia es δ_G:

$A(G) = \delta_G$,

esto es, el *área de G* es igual a su defecto angular. Pero mejor diremos que el área es *proporcional* al defecto angular:

15 La superficie se expresa con un número y una unidad (ej. 2 m^2). El área es la *medida* de la superficie; es un número sin unidad pues es el cociente de la cantidad de superficie dividida por la unidad adoptada (ej. 2 m^2/1 m^2 = 2).

16 No dedicaré espacio a la teoría del área. Puede verse (Moise, 1974: caps. 13 y 14).

$A(G) = c\delta_G$,

donde c es una constante positiva de proporcionalidad. Si bien G es una región poligonal convexa, aceptaremos que cualquier región, sin importar su forma, puede aproximarse mediante la unión de suficientes polígonos convexos que cumplan la condición II citada anteriormente, incluso en regiones de bordes curvos que haya que aproximar por procedimientos del cálculo integral.

La teoría de la semejanza... ¡abolida!

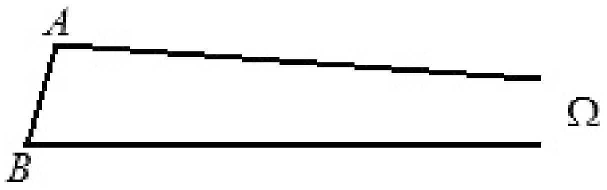
De lo anterior se extrae una consecuencia fundamental: dado que el defecto angular depende de la suma de ángulos interiores S_i, el área también depende de dicha suma. Entonces, dos polígonos con la misma S_i tienen la misma área. Es imposible, por lo tanto, en esta geometría, que haya dos polígonos de igual forma y distinto tamaño (semejantes), pues la igualdad de ángulos implica la igualdad de área. ¡Toda semejanza es, necesariamente, una congruencia!

Podemos recordar aquí la falsa demostración de Wallis del Postulado V, basada en la construcción de un triángulo semejante a otro dado (véase cap. 7, pág. 118) y, ¡finalmente!, entender por qué la prueba es falsa. (¡Es emocionante descubrir un "por qué"!).

En la geometría hiperbólica no existen los modelos a escala. No podríamos construir, por ejemplo, maquetas representativas de objetos mayores, ni mapas. Tampoco sería posible pedir en una fotocopiadora del mundo hiperbólico que nos hagan una reducción o ampliación de un original.

Unos triláteros especiales

Ya se ha dicho algo de triláteros, como el "asintótico" $AB\Omega$ (Fig. 130), determinado al unir con un segmento dos puntos A y B de dos paralelas. Puede el lector revisar sus elementos constitutivos en la tabla presentada en cap. 9, pág. 165. En ese mismo lugar del libro también se ha mencionado que dos de estos triláteros con sus ángulos y lados propios, respectivamente iguales, son congruentes. Sin embargo, aquí resulta innecesaria la condición de la congruencia de los lados propios. En efecto, por lo dicho basta con que solo sean congruentes los ángulos.

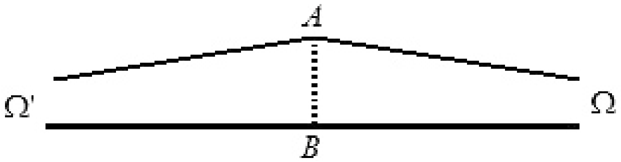


(Fig. 130) Un trilátero asintótico

La deficiencia de esta figura es $\delta = 2\text{R} - \left(\hat{A} + \hat{B}\right)$.

Un segundo tipo de trilátero es el $\Omega A\Omega'$ (Fig. 131), que tiene solamente el vértice A y el ángulo $\hat{A}$ propios, mientras que sus restantes elementos son impropios. Para los lados se tiene que $A\Omega$ // $\Omega'\Omega$ y $A\Omega'$ // $\Omega\Omega'$. Se lo denomina "doblemente asintótico".

El $\Omega A\Omega$’ puede dividirse en dos triláteros del tipo anterior con el segmento $\overline{AB} \perp \Omega\Omega'$. La semirrecta $\overrightarrow{AB}$ es la bisectriz de $\hat{A}$, por lo que esos triláteros son simétricos respecto de AB.



(Fig. 131) Un trilátero doblemente asintótico

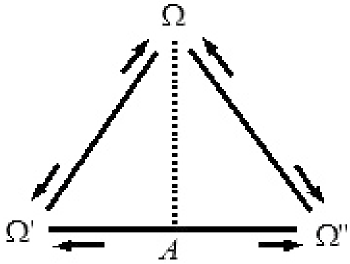
Los ángulos $\angle BA\Omega$ y $\angle BA\Omega$’ son ángulos de paralelismo con igual distancia de paralelismo. En geometría hiperbólica, como luego veremos, a iguales distancias de paralelismo corresponden iguales ángulos de paralelismo, *y recíprocamente*[17]. Por lo tanto, se demuestra fácilmente que dos triláteros como el $\Omega A\Omega$’ que tienen los ángulos propios congruentes, son congruentes.

La deficiencia angular de esta figura es $\delta = 2\mathrm{R} - \hat{A}$.

Un tercer tipo de trilátero es el ΩΩ’Ω”, un curioso objeto que “vemos” en la Fig. 132. Al trilátero “triplemente asintótico” lo forman tres rectas, paralelas mutuamente dos a dos, a saber:

ΩΩ’ // Ω”Ω’, Ω’Ω // Ω”Ω, ΩΩ” // Ω’Ω”.

Póngase atención en el sentido del paralelismo de cada par de paralelas, indicado mediante flechas.



(Fig. 132) El trilátero límite

Esta figura tiene tres lados impropios: ΩΩ’, ΩΩ” y Ω’Ω”; tres vértices impropios: Ω, Ω’ y Ω”; y tres ángulos impropios: ∠ΩΩ’Ω”, ∠Ω’Ω”Ω y ∠Ω”ΩΩ’. Dado que los ángulos impropios son nulos, ¡la suma de ángulos interiores es cero! De esto surge que su defecto angular es 2R, el máximo valor posible para cualquier trilátero. Dicho de otra manera: ningún trilátero puede superar en área a éste[18].

Se comprueba fácilmente que *todos los triláteros de este tipo son congruentes*. Para ello alcanza con trazar la $\overrightarrow{A\Omega}$ perpendicular, por ejemplo, a Ω’Ω” (en línea de puntos, Fig. 132). Esta semirrecta divide al ΩΩ’Ω”, en dos triláteros doblemente asintóticos, que son congruentes por tener ∠Ω’*A*Ω = ∠Ω*A*Ω” = 1R.

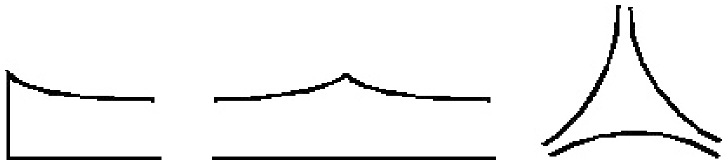
Dado su carácter de trilátero de área máxima, se lo denomina “trilátero límite”. Recordando ahora el criterio de existencia visto en cap. 5. pág. 92, es oportuno reflexionar que la entidad de este objeto

17 Lo que no sucede en la geometría general del paralelismo ni en la euclidiana. Véase cap. 9, pág. 158

18 Es incorrecto decir que el trilátero límite es la figura de área máxima, dado que también existen en esta geometría figuras mayores de las cuales los triláteros límite son parte.

geométrico se debe a la adopción del postulado de Lobachevski. En la geometría euclidiana, en cambio, no hay restricciones para los tamaños de los triángulos.

Los tres tipos de triláteros considerados tienen área finita. En algunos textos las rectas se "transforman" en curvas, para apreciar mejor el carácter asintótico de las rectas, y se los representa como se muestra en la Fig. 133.



(Fig. 133)

Postulados equivalentes al V (segunda lista)

> ... si se pudiese demostrar la existencia posible de un triángulo rectilíneo, cuya área fuese mayor que toda área dada, entonces estaría en condiciones de demostrar con rigor perfecto toda la Geometría (Bonola, 1945: 76)[19].

Ampliamos la lista de axiomas equivalentes al Postulado V dada en el cap. 7, en vistas de lo que hemos aprendido hasta esta parte.

Nº	Enunciado
P_1	A ambos lados de una transversal que corta a dos paralelas, la situación relativa al paralelismo es simétrica.
P_2	Es posible construir un triángulo semejante a otro.
P_3	Por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia.
P_4	La suma de ángulos interiores de un triángulo es un valor constante.
P_5	Dos rectas paralelas se mantienen equidistantes (o bien: el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es otra recta).
P_6	Si una recta corta a una de dos paralelas, corta necesariamente a la otra.
P_7	Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a ella.
P_8	Las proyecciones sobre una recta, de unos segmentos congruentes, de extremos sobre una misma recta, son congruentes.
P_9	No existen rectas asintóticas.
P_{10}	Los ángulos cuadrilátero de Saccheri son todos rectos.
P_{11}	Existen los rectángulos.

19 Afirmación que corresponde a Gauss. El gran matemático pone en evidencia aquí una penetrante, madura y visionaria mirada geométrica.

P_{12}	Los ángulos conjugados internos entre paralelas son suplementarios.
P_{13}	Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.
P_{14}	El ángulo de paralelismo es recto.
P_{15}	Existen triángulos de área arbitraria.

Pueden establecerse variantes entre los postulados de la lista. Por ejemplo un enunciado alternativo para P_2 es "existen figuras semejantes no congruentes", o para P_{15}: "existen figuras de extensión arbitraria".

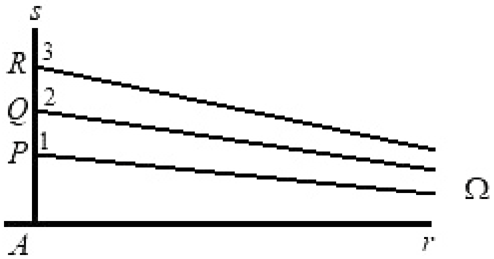
Como puede verse, esto resulta bastante interesante, en particular por las conexiones que se establecen entre temas tan diversos.

Distancia y ángulo de paralelismo

> En nuestro viaje de exploración matemática a través del tiempo y del espacio hemos llegado casi a insensibilizarnos a las generalizaciones y antinomias de cualquier tipo. Sin embargo, por lo que respecta a las geometrías no euclidianas, quienes están habituados a pasar por encima de las peores antinomias llegan a la impaciencia y a la exasperación. Efectivamente, aquí entra en juego algo que se halla en contradicción con el sentido común, entendido no sólo como razón, sino también como intuición (Colerus, 1973: 154).

Consideremos una recta *r* y otra *s*, perpendicular a ella (Fig. 134). Por algunos puntos de *s*: *P*, *Q*, *R*, ..., trazamos las paralelas a *r* en un sentido: $P\Omega$, $Q\Omega$, $R\Omega$, ... Los ángulos de paralelismo respectivos son $\angle AP\Omega$, $\angle AQ\Omega$, $\angle AR\Omega$, ..., y las distancias de paralelismo son $\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{AR}$, etcétera.

Se observa que $\overline{AP} < \overline{AQ} < \overline{AR}$. ¿Qué sucede en general con un ángulo de paralelismo (α) a medida que su distancia de paralelismo (*d*) correspondiente aumenta o disminuye paulatinamente, tendiendo a infinito o a cero?



(Fig. 134)

Si aplicamos el teorema del ángulo exterior a los triláteros de la Fig. 134, se demuestra que los ángulos $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \ldots$ van aumentando de amplitud. Esto implica que sus adyacentes (que son, precisamente, los ángulos de paralelismo), van disminuyendo. Por lo tanto, parece que *si la distancia de paralelismo tiende a infinito, el ángulo de paralelismo tiende a 0*:

$d \to \infty \Rightarrow \alpha \to 0.$

Recorriendo la secuencia de ángulos en sentido inverso: $\hat{3}, \hat{2}, \hat{1}, \ldots$, los ángulos de paralelismo van aumentando, pero como siempre se mantienen agudos resulta que, como todo parece indicar, *su límite es 1R cuando la distancia tiende a 0*:

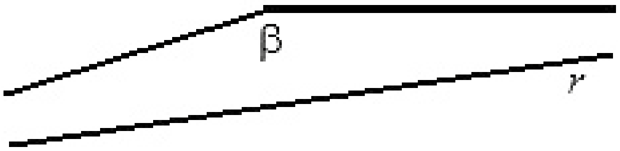
$d \to 0 \Rightarrow \alpha \to 1\text{R}$.

Por lo dicho resulta que el ángulo y la distancia de paralelismo estarían ligados por una relación funcional, es decir, $\alpha = f(d)$. Cuál es esa función será objeto de estudio posterior, como también la confirmación de lo que intuitivamente notamos en el breve análisis reciente.

Algunas proposiciones sobre el asunto son estas:

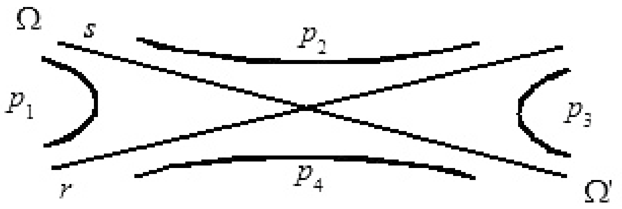
I) Para cualquier ángulo dado agudo $\hat{\alpha}$ hay una distancia de paralelismo d determinada. Supongamos que $\hat{\alpha}$ fuese el $\angle AP\Omega$ de la Fig. 134. Entonces se traza por Ω la recta $r \perp s$ (única), que la corta en A. La distancia de paralelismo correspondiente a $\hat{\alpha}$ será, entonces, $\overline{AP}$. Esto significa que $d = f^{-1}(\alpha)$.

II) Para cualquier ángulo no llano ni nulo $\hat{\beta}$ existe una y solo una recta r, paralela a sus dos lados (Fig. 135). Esto significa que para un ángulo $\hat{\beta}$ dado, el trilátero doblemente asintótico que resulta determinado es único (véase en este cap. pág. 188).



(Fig. 135)

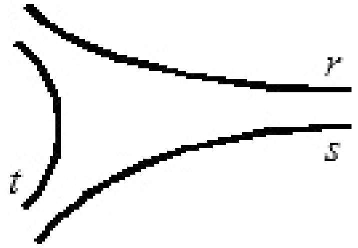
III) Si dos rectas r y s se cortan, hay solo cuatro rectas paralelas a cada una de ellas. En la Fig. 136 se aprecian las rectas p_1 y p_2 paralelas a s (con punto impropio Ω) en uno de los semiplanos de borde r, y p_3 y p_4 también paralelas a s (con punto impropio Ω'), en el otro semiplano de borde r[20].



(Fig. 136)

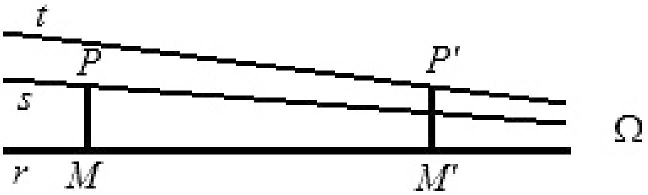
IV) Si dos rectas r y s son paralelas en un sentido, existe una y solo una recta t paralela a ambas e interior a la faja que determinan. Las tres rectas determinan un trilátero límite (Fig. 137) (Bartrina y Capella, 1908: 45).

20 (Sólo por cultura geométrica) recuérdese que los dos semiplanos de igual borde se dicen *opuestos*.



(Fig. 137)

V) ¡Todas las fajas entre paralelas son congruentes! Vemos en la Fig. 138 las rectas *r*, *s* y *t*, tales que *r* // *s* // *t*. Sea $\overline{PM}$ la distancia de paralelismo entre *r* y *s* desde el punto *P*. También lo sea $\overline{P'M'}$ entre *t* y *r* desde *P'*. Es perfectamente posible que sea $\overline{PM} = \overline{P'M'}$ y así lo dibujamos[21]. Si a la faja (*rs*) le aplicamos una traslación de manera que $\overline{PM}$ coincida con $\overline{P'M'}$ resulta claro que (*rs*) = (*tr*). ¡Entonces, dividiendo una faja en otras mediante paralelas a sus lados, ellas son congruentes entre sí y con la faja total! Uno no termina de sorprenderse.

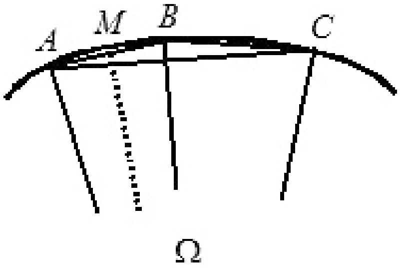


(Fig. 138)

Oriciclos

Ya estudiamos la definición de este objeto en cap. 9, pág. 170 y, en la geometría euclidiana, lo identificamos con la recta. En la geometría que ahora nos ocupa, sin embargo, tenemos lo siguiente:

Teorema: tres puntos cualesquiera de un oriciclo no están alineados.



(Fig. 139)

Demostración: sea un oriciclo de centro Ω y los puntos *A*, *B* y *C*, cualesquiera pertenecientes a él (Fig. 139). *A*, *B* y *C*, determinan las cuerdas $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$.

21 Si usted ve que $\overline{P'M'}$ es más largo que $\overline{PM}$ está experimentando una ilusión óptica.

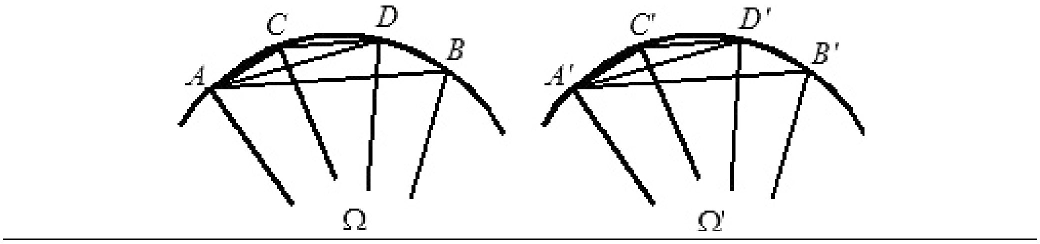
Si M es punto medio de la cuerda $\overline{AB}$ y trazamos $M\Omega$, bisectriz de la faja que determinan $A\Omega$ y $B\Omega$, resulta $\angle\Omega AB = \angle\Omega BA$, por ser ángulos de paralelismo correspondientes a las distancias iguales $\overline{AM}$ y $\overline{MB}$.

De manera análoga se prueba que $\angle\Omega BC = \angle\Omega CB$ y que $\angle\Omega AC = \angle\Omega CA$.

¿Qué sucedería si A, B y C, estuviesen alineados? Resultaría que, digamos, para el trilátero $AB\Omega$, se tendría $\angle\Omega AB = \angle\Omega BC$. Esta es la ya demostrada imposible igualdad de un ángulo externo con el interno opuesto.

Aquí se aclara la falla del intento de W. Bolyai del cap. 7; en efecto, por tres puntos no alineados no necesariamente pasa una circunferencia, puede pasar un oriciclo de centro infinitamente alejado.

Teorema: en un oriciclo o en dos oriciclos cualesquiera, a cuerdas iguales corresponden arcos iguales, y recíprocamente.



(Fig. 140)

Demostración: partimos de que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ en los oriciclos que muestra la Fig. 140. Es posible asignar a cualquier punto C del primer oriciclo, un punto C' en el segundo oriciclo, tal que se cumpla la condición de ser iguales los triláteros $AC\Omega$ y $A'C'\Omega'$ (esta correspondencia es biunívoca, así que también se puede establecer desde el segundo oriciclo sobre el primero).

Si C y otro punto D son puntos del primer arco y sus correspondientes son C' y D' en el segundo arco, se demuestra que $\overline{CD} = \overline{C'D'}$. En efecto:

$\overline{AC} = \overline{A'C'}$ (1) por la definición de la correspondencia citada.

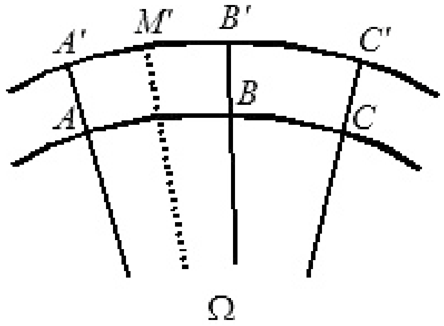
$\overline{AD} = \overline{A'D'}$ (2) por lo mismo.

Los triángulos ACD y $A'C'D'$ son congruentes por criterio LLA, de (1), (2) y por ser $\angle ACD = \angle A'C'D'$ (ambos son suma de ángulos congruentes). De esta congruencia resulta $\overline{CD} = \overline{C'D'}$.

La igualdad de los arcos se demuestra aproximándolos por poligonales determinadas por puntos correspondientes, cuyos segmentos constitutivos, en cantidad tendiente a infinito, posean longitud que se aproxime a cero.

Análogamente se puede demostrar que dos oriciclos cualesquiera son congruentes entre sí.

Los *oriciclos concéntricos* poseen algunas propiedades importantes. Consideremos dos oriciclos de centro Ω (Fig. 141).



(Fig. 141)

Se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos *A* y *A'*, *B* y *B'*, *C* y *C'*, ... Resulta además, $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, lo que se demuestra en virtud de la simetría de los puntos de las rectas *AA'* y *BB'* respecto de la bisectriz *M'*Ω de la faja que limitan. Diremos que dos arcos como (*AB* y (*A'B'* son *correspondientes*[22].

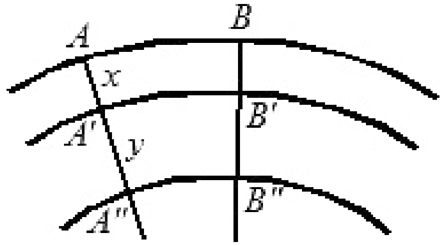
Puede demostrarse (no lo haremos) que los arcos de un oriciclo son proporcionales a los arcos correspondientes de cualquier oriciclo concéntrico (Bonola, 1921: 343). Por lo tanto podemos escribir:

(*AB* / (*BC* = (*A'B'* / (*B'C'*

o también

(*AB* / (*A'B'* = (*BC* / (*B'C'*,

lo que nos está diciendo que la razón entre arcos correspondientes en oriciclos concéntricos es constante.



(Fig. 142)

Suponemos que el valor de la razón entre arcos correspondientes es función de la distancia que separa los oriciclos, por lo tanto podemos afirmar que (Fig. 142)

(*AB* / (*A'B'* = $f(x)$, (*A'B'* / (*A''B''* = $f(y)$. (1)

Y también que

(*AB* / (*A''B''* = $f(x + y)$. (2)

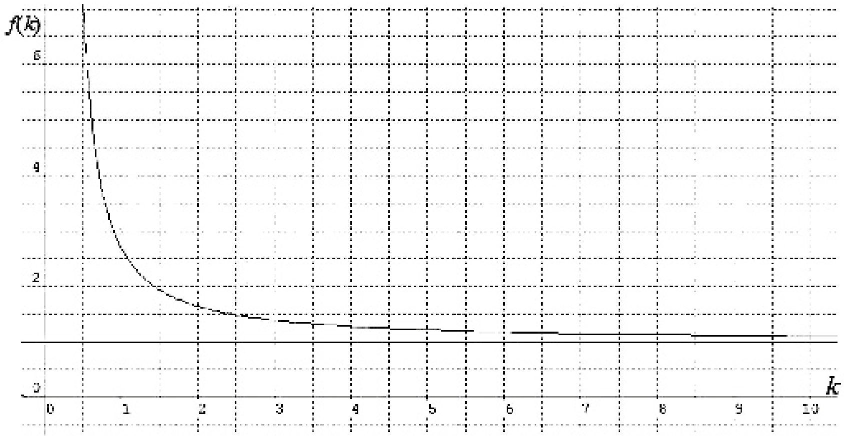
22 Permítaseme esa notación para los arcos.

Multiplicando miembro a miembro las razones (1) y de (2) resulta:

$f(x).f(y) = f(x + y)$. (3)

La función exponencial $f(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) es continua y satisface la igualdad (3), así que resulta adecuada para expresar el valor de la relación entre los arcos de oriciclos concéntricos. En particular, si se toma $a = e^{1/k}$, siendo k un parámetro de la geometría hiperbólica[23], resulta $f(x) = e^{x/k}$.

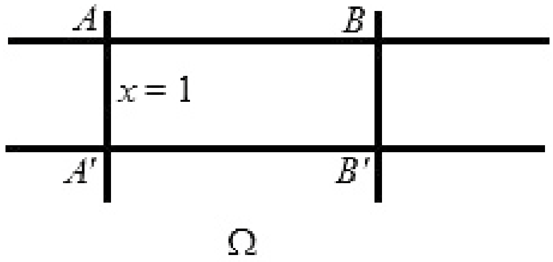
Por razones que en breve se expondrán, debe ser $k > 0$. Para aproximarnos a la idea de qué papel juega este parámetro, vamos ahora a suponer que la distancia entre oriciclos es un valor fijo (digamos $x = 1$) y dibujemos la gráfica de la función $f(k) = e^{1/k}$ (Fig. 143). El símbolo $f(k)$ indica el valor de la relación entre arcos de oriciclo en función del parámetro k, para distancia 1 entre oriciclos.



(Fig. 143)

Podemos percatarnos aquí que a medida que k aumenta, la razón entre arcos tiende a 1 (la asíntota horizontal $f(k) = 1$ se ha dibujado en el gráfico). En otras palabras, para valores grandes de k los oriciclos tienden a transformarse en *rectas euclidianas* (Fig. 144), en cuyo caso los arcos serán segmentos de la misma longitud (y su razón vale, por ende, 1). Esto es familiar para nosotros.

Por otra parte, como siempre se tiene que $f(k) > 1$, se deduce que siempre el arco de oriciclo más "externo", como el (*AB* de la Fig. 142, será de mayor longitud que el más "interno", tal como el (*A'B'* o el (*A"B"*.



(Fig. 144)

23 Es decir que a diferentes valores de k se tienen geometrías hiperbólicas de distinto "tamaño", ya que la distancia x entre oriciclos resulta dividida por k.

La geometría euclidiana como límite

Hemos visto en las últimas secciones dos hechos interesantes y llamativos:

- Para distancias de paralelismo que tienden a cero, los ángulos de paralelismo de las paralelas hiperbólicas tienden a 1R. En el límite, dichos ángulos serán rectos y *las paralelas se confundirán en una sola.*

- Para valores grandes del parámetro k los oriciclos se aproximan a rectas euclidianas.

Estos dos hechos han llevado a sugerir que la geometría hiperbólica, para distancias muy pequeñas, se "convierte" por así decirlo, en euclidiana. En conexión con la geometría de nuestro universo físico, sería posible que estemos viviendo en un cosmos hiperbólico, pero no nos percataríamos de ello por el hecho de manejar nuestros asuntos en una porción muy reducida del espacio.

La geometría del universo (o al menos de la parte en que habitamos) quizás es hiperbólica, pero en ese caso su parámetro k es muy grande y se asemeja por ello a la vieja y querida geometría de Euclides.

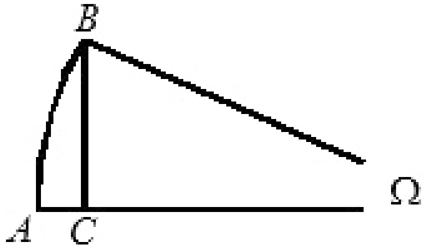
En el marco de estas elucubraciones, el Postulado V aparece como un postulado de *simplificación*, y su presencia significaría hacernos más fáciles las cosas en el terreno de la geometría cotidiana y más "natural", la que conocimos tempranamente. ¿Cuesta creerlo, no?

La relación entre distancia y ángulo de paralelismo

Una de las peculiaridades que vimos en relación con la orisfera es que sobre su superficie es válida la geometría euclidiana y también, agregamos, la trigonometría ordinaria. Mediante esta característica, y la teoría de triláteros y oriciclos, vamos a obtener la relación matemática entre la distancia (d) y el ángulo de paralelismo (α), denominada *fórmula de Lobachevski.* (Bartrina y Capella, 1908: 128), (Bonola, 1921: 345)[24].

Vamos a necesitar una definición y dos teoremas previos.

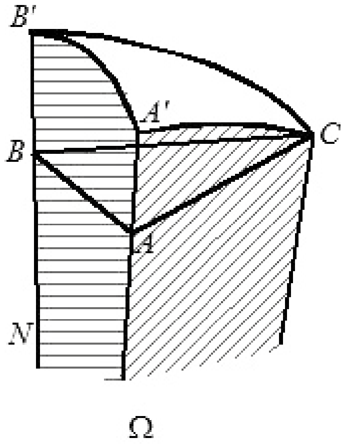
Definición: sean $(AB$ un arco de oriciclo, $A\Omega$ y $B\Omega$ dos de sus radios y C la proyección ortogonal de B sobre $A\Omega$. Llamaremos *ordenada del arco* $(AB$ a la longitud del segmento $\overline{BC}$ (Fig. 145).



(Fig. 145)

24 Lobachevski simbolizó $\pi(d)$ al ángulo de paralelismo correspondiente a la distancia d. No usaré aquí esa notación.

Teorema previo 1: en todo triángulo rectángulo el seno de un ángulo agudo es igual a la razón entre los dos arcos oricíclicos cuyas respectivas ordenadas son el cateto opuesto y la hipotenusa.



(Fig. 146)

Demostración: sea el *BAC* rectángulo en *A* (Fig. 146).

Por *B* dibujamos *BN* perpendicular al plano del triángulo. Luego por *A* y *C* trazamos *A*Ω // *BN* y *C*Ω // *BN*.

Se traza la orisfera de centro Ω y radio *C*Ω, que encuentra a las otras rectas en *A'* y *B'*. Queda determinado el triángulo oricíclico *A'B'C*. Ahora, a jugar con planos:

El plano *ABC* es perpendicular al *ABN* por serlo a una de sus rectas (*BN*). Esto implica que *CA* (que es perpendicular a *AB* por hipótesis) es perpendicular al plano *ABN* y, por ende, a su recta *A*Ω. Luego, los planos *ABN* y *AC*Ω son perpendiculares.

Recuérdese que el ángulo formado por dos curvas que se intersectan se define como el que forman sus tangentes en el punto de intersección. Las tangentes en *B'* de los arcos (*B'C* y (*B'A'* están en el mismo diedro que los lados $\overline{BC}, \overline{BA}$ del triángulo *BAC*, por lo tanto $\hat{B} = \hat{B}'$. Con análogo razonamiento se tiene que $\hat{A} = \hat{A}' = 1\mathrm{R}$.

También:

$\overline{AC}$ = ordenada del (*A'C*,

$\overline{BC}$ = ordenada del (*B'C*.

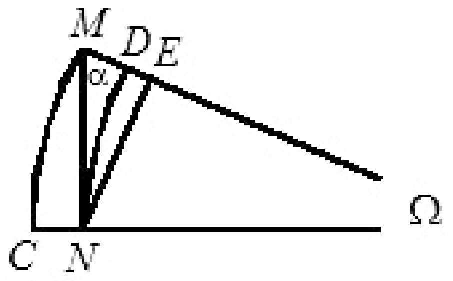
Como la trigonometría del triángulo orisférico es idéntica a la euclidiana (véase cap. 9, pág. 173), podemos escribir

sen $\hat{B}$ = sen $\hat{B}'$ = (*A'C* / (*B'C*.

lo que demuestra el teorema.

Teorema previo 2 (Fig. 147): sea $\Omega MC\Omega$ un sector de oriciclo, y $\overline{MN}$ la ordenada del arco (MC. Si α es el ángulo de paralelismo correspondiente a la distancia $\overline{MN}$ y k es una constante positiva, entonces

$1/\text{sen}\ \alpha = e^{\overline{CN}/k}$.



(Fig. 147)

Demostración: dibujamos por N el arco de oriciclo (ND, concéntrico con (CM y su ordenada $\overline{NE}$ sobre $M\Omega$.

En el triángulo rectángulo MEN se tiene, por el teorema anterior,

sen α = (ND / (MC, o bien

$1/\text{sen}\ \alpha$ = (MC / (ND.

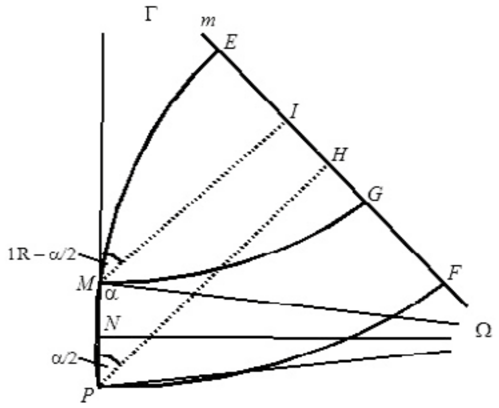
Por lo visto en pág. 194 de este capítulo, la razón de los arcos es función de la distancia que los separa, y podemos poner

$1/\text{sen}\ \alpha = e^{\overline{CN}/k}$.

Obsérvese que en la fórmula no aparece la distancia de paralelismo.

Teorema: si $\overline{MN} = d$ es la distancia de paralelismo correspondiente al ángulo de paralelismo a entonces (siendo k una constante positiva), es

$\tan({}^{\alpha}/_{2}) = e^{-d/k}$.



(Fig. 148)

Demostración: (Fig. 148). Partimos del trilátero $MN\Omega$. Se prolonga $\overline{NM}$ hasta Γ y se construye el trilátero $NP\Omega$, simétrico del $MN\Omega$ respecto de la recta $N\Omega$. Se traza la recta m paralela a los lados del $\angle\Gamma M\Omega$[25]. Resulta también $m \parallel N\Omega$ y $m \parallel P\Omega$.

Se trazan los arcos oricíclicos $(PF$ y $(MG$ de centro Γ, y $(PE$ de centro Ω, pasando por M; se dibujan las respectivas ordenadas $\overline{MI}, \overline{PH}$, de los arcos mencionados (en líneas de puntos).

En el trilátero doblemente asintótico $\Gamma M\Omega$ la semirrecta $\overrightarrow{MI} \perp m$ es bisectriz del ángulo propio $\angle\Gamma M\Omega = 2R - \alpha$, como así también en el trilátero doblemente asintótico $\Gamma P\Omega$, $\overrightarrow{PH} \perp m$ es bisectriz de $\angle NP\Omega = \alpha$. De todo esto se tiene que:

$\angle HPG = {}^{\alpha}/_{2}$, y

$\angle IMG = (2R - \alpha)/2 = 1R - {}^{\alpha}/_{2}$ (estos ángulos se han marcado con sendos arcos).

Como $M\Gamma \parallel m$ y $P\Gamma \parallel m$, aplicando el Teorema previo 2:

$1/\mathrm{sen}({}^{\alpha}/_{2}) = (PF / (MG = e^{\overline{FH}/k}$, (1)

$1/\mathrm{sen}(1R - {}^{\alpha}/_{2}) = 1/\cos({}^{\alpha}/_{2}) = e^{\overline{GI}/k}$. (2)

Dividimos miembro a miembro (1) por (2) y obtenemos:

$\cot({}^{\alpha}/_{2}) = e^{\overline{FH}/k - \overline{GI}/k}$. (3)

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

- H es punto medio de $\overline{EF}$ e I es punto medio de $\overline{EG}$ (pues hemos trazado arcos de oriciclo de igual radio por M y por P),

- $\overline{FG} = \overline{MP}$ (distancia entre los oriciclos concéntricos),

- $\overline{MP} = 2\overline{MN} = 2d$ (por construcción),

el exponente de (3) resulta:

$$\frac{\overline{FH}}{k} - \frac{\overline{GI}}{k} = \frac{1}{2k}\left[\overline{EF} - \overline{EG}\right] = \frac{1}{2k}\left[\overline{FG}\right] = \frac{1}{2k}\left[\overline{MP}\right] = \frac{1}{k}\left[\overline{MN}\right] = \frac{1}{k}d.$$

Sustituyendo ahora este resultado en (3) queda:

$\cot({}^{\alpha}/_{2}) = e^{d/k}$

y esto nos lleva a

$\tan({}^{\alpha}/_{2}) = e^{-d/k}$. (4)

25 En geometría hiperbólica siempre existe la paralela a los lados de cualquier ángulo que no sea nulo ni llano (véase en este capítulo, pág. 191, teorema II, Fig. 135).

Esta última es la fórmula de Lobachevski. Es posible que la hallemos en otros textos sin el parámetro *k*. Veamos qué sucede en los casos "límite":

a) $d \to \infty \Rightarrow -d/k \to -\infty \Rightarrow e^{-d/k} \to 0 \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0.$

b) $d \to 0 \Rightarrow -d/k \to 0 \Rightarrow e^{-d/k} \to 1 \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} \to 1 \Rightarrow \alpha \to 1R.$

Esto corrobora lo que analizamos oportunamente en la pág. 190 de este capítulo.

Volviendo al tema del parámetro *k*, si despejamos α en (4) obtenemos[26]:

$\alpha = 2\tan^{-1}\left(e^{-d/k}\right).$

α resulta agudo siempre que $0 < e^{-d/k} < 1$, y como $d > 0$, esto obliga a que *k* sea *positivo*. En caso de ser negativo (0 no puede ser), obtendríamos ángulos de paralelismo mayores a 1R, lo que contradice el axioma fundacional de Lobachevski.

Las siguientes tablas-ejemplo dan valores del ángulo para distancias decrecientes (van dividiéndose a la mitad, por tomar algún criterio), para *k* = 1 y *k* = 5.

Resulta muy interesante cómo varía el "tamaño" de la geometría con el cambio en el parámetro *k*[27].

k	*d*	tan(α/2)	α (rad)	α (º)
1	8	0,00034	0,00067	0,03844
1	4	0,01832	0,03663	2,09858
1	2	0,13534	0,26904	15,41463
1	1	0,36788	0,70503	40,39506
1	0,5	0,60653	1,09042	62,47619
1	0,25	0,77880	1,32336	75,82297
1	0,125	0,88250	1,44612	82,85661
1	0,0625	0,93941	1,50834	86,42134
1	0,03125	0,96923	1,53955	88,20980
1	0,015625	0,98450	1,55517	89,10479
1	0,0078125	0,99222	1,56298	89,55238

26 Uso la notación "$\tan^{-1}$" en vez de "arc tan" para designar el arco tangente. En algunos textos se utiliza, alternativamente, "tg" en vez de "tan" para la tangente. Por supuesto que $\tan^{-1}$ no tiene nada que ver con una elevación a potencia; el exponente –1 denota aquí una función inversa.

27 *k* puede tomar cualquier valor positivo, no necesariamente entero.

k	*d*	tan(α/2)	α (rad)	α (º)
5	8	0,20190	0,39844	22,82875
5	4	0,44933	0,84459	48,39153
5	2	0,67032	1,18106	67,66948
5	1	0,81873	1,37212	78,61648
5	0,5	0,90484	1,47096	84,27995
5	0,25	0,95123	1,52082	87,13640
5	0,125	0,97531	1,54580	88,56775
5	0,0625	0,98758	1,55830	89,28382
5	0,03125	0,99377	1,56455	89,64190
5	0,015625	0,99688	1,56767	89,82095
5	0,0078125	0,99844	1,56923	89,91048

Veamos una tabla más, donde se da a *k* un valor negativo, y donde se obtienen para el ángulo de paralelismo resultados no válidos en la geometría hiperbólica.

k	*d*	tan(α/2)	α (rad)	α (º)
-1	8	2980,95799	3,14092	179,96156
-1	4	54,59815	3,10497	177,90142
-1	2	7,38906	2,87256	164,58537
-1	1	2,71828	2,43657	139,60494
-1	0,5	1,64872	2,05118	117,52381
-1	0,25	1,28403	1,81823	104,17703
-1	0,125	1,13315	1,69547	97,14339
-1	0,0625	1,06449	1,63326	93,57866
-1	0,03125	1,03174	1,60204	91,79020
-1	0,015625	1,01575	1,58642	90,89521
-1	0,0078125	1,00784	1,57861	90,44762

Hay más fórmulas que relacionan la distancia y el ángulo de paralelismo, las cuales incluyen funciones trigonométricas hiperbólicas. Son las siguientes (a fin de simplificar se omiten las deducciones y se toma $k = 1$)[28]:

- sen $\alpha = 1/\cosh d$,

- cos $\alpha = \tanh d$,

28 Véase, para ampliar, Bartrina y Capella (1908: 130).

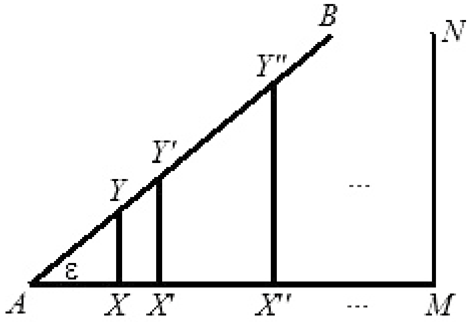
- $\tan \alpha = 1/\text{senh}\, d$,

- $\cot \alpha = \text{senh}\, d$.

Para finalizar esta sección vamos a considerar un ángulo agudo como el $\varepsilon = \angle MAB$ de la Fig. 149 (usted suponga que en la figura aún no está trazada la recta *MN*). Desde uno de sus lados trazamos rectas perpendiculares a ese lado, por puntos *X*, *X'*, *X''*, ... a distancias crecientes del vértice *A*. Nos preguntamos si esas perpendiculares cortarán todas al otro lado del ángulo, es decir, a $\overrightarrow{AB}$.

Como ε es agudo, es ángulo de paralelismo correspondiente a una cierta distancia $\overline{AM}$. Por el punto *M* trazamos ahora *MN* perpendicular a *AM*. Por lo tanto resulta, con esa construcción, que *MN* // *AB*.

A partir de aquí queda claro que *algunas* de las perpendiculares cortan al lado $\overrightarrow{AB}$, determinando segmentos de longitud creciente $\overline{XY}, \overline{X'Y'}$, ..., etc. Dicha longitud puede superar cualquier número por grande que sea. Sin embargo hay un límite en cuánto podremos alejarnos del vértice *A* para que las perpendiculares encuentren al lado $\overrightarrow{AB}$: la distancia de paralelismo correspondiente a ε. Al ser *MN* // *AB*, ninguna perpendicular puede coincidir con *MN* pues *MN* no corta a *AB*.



(Fig. 149)

Con otros términos podemos decir que *una perpendicular y una oblicua a una misma recta no siempre se cortan* en la geometría hiperbólica. Esto nos recuerda lo que Saccheri demostró en la Prop. XVII (véase cap. 8, pág. 144).

Ultraparalelas

Recordemos que, dada una recta *r*, llamamos *paralelas a r* a *dos* rectas no secantes con ella con las siguientes características:

- se comportan asintóticamente con *r* (su distancia mutua decrece en el sentido del paralelismo);

- comparten cada una con *r* un punto impropio (aunque cada recta tiene dos, solo uno se comparte con cada paralela);

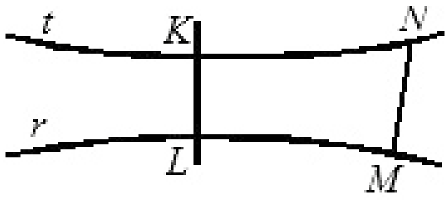
- no tienen perpendicular común con *r*.

Existen sin embargo otras rectas no secantes con *r*, ya citadas, que denominamos *ultraparalelas.* Estas tienen como características:

- una *única* perpendicular común con *r*;

- por un punto exterior a *r* pasan infinitas ultraparalelas con ella;

- son divergentes con *r* en ambos sentidos a partir de la perpendicular común.



(Fig. 150)

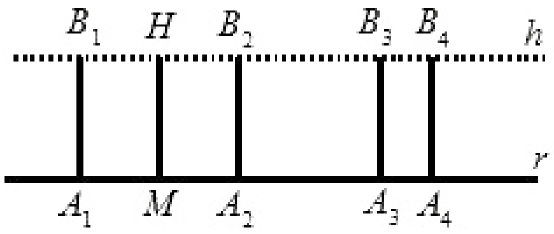
En la Fig. 150 están representadas la recta *r* y una ultraparalela a ella, *t.* La recta *KL* es perpendicular a ambas. El segmento $\overline{KL}$ es el más corto posible de trazar entre ellas y su longitud es la distancia entre las rectas. Cualquier otro segmento perpendicular a *r*, como el $\overline{MN}$, es mayor que $\overline{KL}$ y corta a *t* formando un ángulo *agudo* $\angle MNK$. Esto es así porque el cuadrilátero *KLMN* tiene ángulos rectos en los vértices *K*, *L* y *M*, lo que obliga a que el cuarto ángulo sea agudo. Puede compararse lo visto aquí con el tratamiento de Saccheri en el cap. 8, particularmente su Proposición XXIII.

Hiperciclos

Tomamos en consideración una recta *r* y nos preguntamos qué lugar geométrico forman todos los puntos que están a una *distancia fija* de ella, en uno de los semiplanos que determina.

También podemos pensarlo así: construimos infinitos segmentos $\overline{A_iB_i}$ (i = 1, 2, ...) perpendiculares a *r*, todos de igual longitud, con los extremos A_i sobre *r*. ¿Qué figura determinan los otros extremos B_i de los segmentos?

En la Fig. 151 tenemos *r* y algunos segmentos perpendiculares a ella, $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} =$... y, con línea de puntos, el lugar geométrico *h* generado por los extremos B_i supuestos en cantidad infinita. ¿Es *h* una recta?



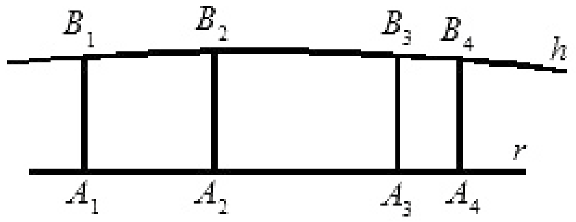
(Fig. 151)

Consideremos dos de esos segmentos, digamos $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, y supongamos que *h* es una recta. Se tiene entonces un cuadrilátero $A_1A_2B_2B_1$ que es, por lo tanto, birrectángulo isósceles, de donde los ángulos en los vértices B_1 y B_2 son agudos. Sean M y H los respectivos puntos medios de $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{B_1B_2}$. Luego, se deduce fácilmente (como en la Proposición II del Saccheri) que $\overline{HM} \perp \overline{A_1A_2}$ y $\overline{HM} \perp \overline{B_1B_2}$.

Al ser $\overline{HM}$ una perpendicular común no puede ser *h // r*, pero tampoco puede ser *h* una ultraparalela a *r*, puesto que, de ser así, los segmentos $\overline{A_iB_i}$ serían mayores que $\overline{HM}$ y de longitud creciente a medida que se alejan de la perpendicular común, lo que contradice la condición inicial de que los $\overline{A_iB_i}$ son todos congruentes. Por lo tanto *h* no es una recta.

Pero resulta de este análisis que *h* debe ser una curva, es decir, no puede contener ningún segmento (rectilíneo, obviamente) por pequeño que sea, dado que, en virtud de tal segmento, se formaría un cuadrilátero birrectángulo isósceles, y de allí seguiría el razonamiento anterior que lleva a un absurdo.

El lugar geométrico *h* es, entonces, una curva que recibe el nombre de *hiperciclo* o *equidistante* (ya que todos sus puntos están a una distancia fija de la recta *r*). Cualquiera de los segmentos $\overline{A_iB_i}$ citados antes es una *altura* del hiperciclo y la recta *r* se denomina su *base*. Un dibujo más intuitivo para este lugar geométrico se ve en la Fig. 152, aunque se pierde en ella la igualdad de las longitudes de las alturas.



(Fig. 152) El hiperciclo o equidistante.

Releamos, en la segunda lista de postulados equivalentes al V de Euclides (véase pág. 189 de este cap.): "Dos rectas paralelas se mantienen equidistantes (o bien: el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es otra recta)". Se comprenden ahora con más profundidad esos enunciados y por qué en la geometría hiperbólica ese lugar geométrico no puede ser una recta y es, en cambio, una línea curva: la equidistante o hiperciclo.

La unidad natural de longitud y una nueva sorpresa

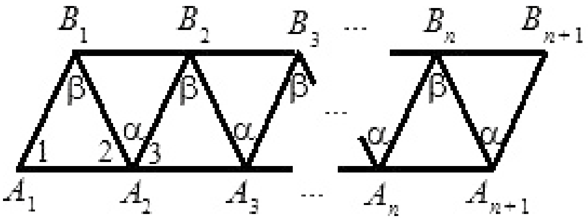
A esta altura el lector muy paciente ya tiene un buen entrenamiento para enfrentarse con cosas raras, como las que hemos estado estudiando. Por eso, vamos a completar confiados el panorama de los intentos de demostración del Postulado. Esta vez, sin embargo, podrá verse una cualidad muy llamativa de la geometría hiperbólica.

Recordamos, en primer lugar, la tentativa de Legendre (véase cap. 7, pág. 124). El teorema allí expuesto, conocido como "Segundo Teorema de Legendre" fue demostrado, en realidad, un siglo antes por Saccheri en una forma equivalente (Bonola, 1945: 43)[29]. Dijimos en tal ocasión que, suponiendo Legendre para los triángulos una $S_i > 2R$, llegó a una contradicción y que, considerando $S_i < 2R$,

29 Véase la Proposición IX de Saccheri en cap. 8, pág. 139.

no pudo obtener ninguna. Pero, para ser más precisos, lo que él demostró en aquel teorema del cap. 7 es que la S_i del triángulo es *igual o menor* que 2R.

Antes de ir al desenlace del análisis del matemático francés, veamos el muy interesante “Primer Teorema de Legendre”, donde busca probar lo mismo (Bonola, 1945: 67).



(Fig. 153)

Considérense n triángulos congruentes $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_nB_nA_{n+1}$, construidos de manera que sus bases tienen todos los extremos alineados (Fig. 153). Uniendo con segmentos los puntos B_1, B_2, B_3, ..., resultan $n-1$ triángulos congruentes $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$, $B_{n-1}A_nB_n$. Se completa la figura con el triángulo $B_nA_{n+1}B_{n+1}$, congruente con los anteriores. (Los triángulos del primer grupo no son necesariamente congruentes con los del segundo).

Se demostrará que $\beta \leq \alpha$. En efecto, si $\beta > \alpha$, en los triángulos $A_1B_1A_2$ y $B_1A_2B_2$ se tiene $\overline{A_1A_2} > \overline{B_1B_2}$, (1) por Euclides I.25.

Dado que la poligonal $A_1B_1B_2...B_{n+1}A_{n+1}$ es mayor que $\overline{A_1A_{n+1}}$, resulta que

$$\overline{A_1B_1} + n\overline{B_1B_2} + \overline{A_{n+1}B_{n+1}} > n\overline{A_1A_2},$$

es decir

$$2\overline{A_1B_1} > n\left(\overline{A_1A_2} - \overline{B_1B_2}\right). \ (2)$$

Pero, para n suficientemente grande, la desigualdad (2) conduce a un absurdo porque, por (1), la diferencia encerrada entre paréntesis es positiva y, tarde o temprano, superará a $2\overline{A_1B_1}$. Esto contradice el postulado de Arquímedes. El absurdo proviene de suponer $\beta > \alpha$; luego $\beta \leq \alpha$.

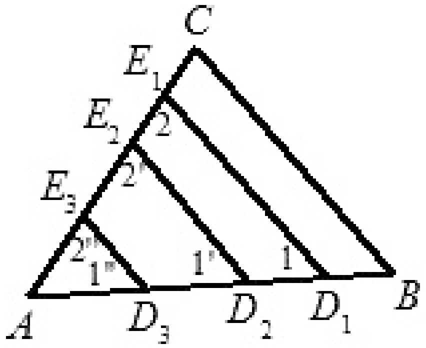
Establecido esto, Legendre deduce que la S_i del triángulo $A_1B_1A_2$ es *menor o igual* a dos rectos. En efecto (seguimos en la Fig. 153):

$\hat{2} + \alpha + \hat{3} = 2R$ (4) pues forman un ángulo llano.

Para el $A_1B_1A_2$ es $S_i = \hat{2} + \beta + \hat{1}$, pero como $\hat{3} = \hat{1}$ por construcción, resulta $S_i = \hat{2} + \beta + \hat{3}$. (5)

Ya que, según se acaba de demostrar, $\beta \leq \alpha$, de (4) y (5) se obtiene que $S_i \leq 2R$ en el triángulo considerado. Y esto puede generalizarse a cualquier triángulo.

Legendre ahora desea eliminar la posibilidad de que $S_i < 2R$. Veamos:



(Fig. 154)

En el triángulo *ABC* (Fig. 154) se supone $S_i < 2R$ (*).

Sobre el lado $\overline{AB}$ se toman los puntos D_1, D_2, D_3, etc. y se construyen los ángulos $\hat{1}, \hat{1}', \hat{1}''$, etc., todos congruentes con $\hat{B}$. De esto resulta que sobre $\overline{AC}$ quedan determinados E_1, E_2, E_3, etc. y también que se forman los ángulos $\hat{2}, \hat{2}', \hat{2}''$, etc. *No* decimos que estos son congruentes con $\hat{C}$.

Bajo la condición (*) aceptada, se demuestra que la S_i de un cuadrilátero es menor a 4R, y que en el cuadrilátero CE_1D_1B resulta $\hat{1} + \hat{2} > \hat{C} + \hat{B}$, tal como estableció Saccheri en el corolario de su Proposición XVI (véase cap. 8, pág. 144 y Fig. 73).

Razonando de igual manera sobre los cuadriláteros $E_2E_1D_1D_2$, $E_3E_2D_2D_3$, ..., y relacionando todo, se obtiene que

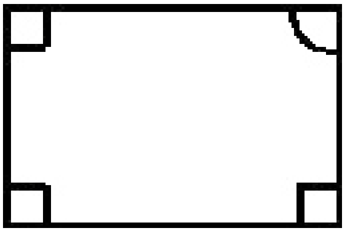
$$\hat{1}'' + \hat{2}'' > \hat{1}' + \hat{2}' > \hat{1} + \hat{2} > \hat{C} + \hat{B};$$

pero como $\hat{1}'' = \hat{1}' = \hat{1} = \hat{B}$, se deduce la desigualdad $\hat{2}'' > \hat{2}' > \hat{2} > \hat{C}$. Esto significa claramente que los valores de los ángulos exteriores *no fijos* $\hat{2}, \hat{2}', \hat{2}''$, etc., dependen de la ubicación de los puntos D_1, D_2, D_3, etc. En otras palabras, el valor del ángulo exterior considerado *es función del segmento* $\overline{AD_i}$ (i = 1, 2, 3, ...) correspondiente.

> Pero este resultado, según Legendre, es absurdo porque la longitud de un segmento no tiene significación si no se conoce la unidad de medida a que está referida, y la naturaleza de la cuestión no indica en modo alguno esta unidad. Por consiguiente, hay que rechazar la hipótesis $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2R$, y, por tanto, se tendrá $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2R$. Pero de esta igualdad síguese fácilmente la demostración del postulado euclídeo (Bonola, 1945: 68).

Ha quedado a la vista aquí una nueva arista de la problemática del Postulado V. Al negar su validez (tal como resulta de la aceptación de la HAA, en Saccheri, o que la suma de ángulos de los triángulos es inferior a 2R, en Legendre), surge una inesperada relación funcional entre los segmentos y los ángulos. De hecho, también sucede esto con la distancia y el ángulo de paralelismo.

Comentaré ahora el intento de prueba del Postulado debido al suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777), que va en la misma dirección y que es anterior al de Legendre (Bonola, 1945: 56 y ss.). Este matemático trabajó con la figura fundamental de un cuadrilátero trirrectángulo (Fig. 155). Planteó tres hipótesis referidas al cuarto ángulo: que fuera recto, obtuso o agudo, la original estocada saccheriana.

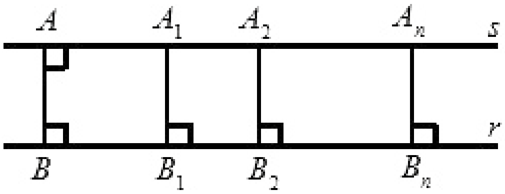


(Fig. 155) El cuadrilátero de Lambert.

Naturalmente la primera hipótesis equivale al Quinto Postulado. Para refutar la segunda, probó (véase la Fig. 156), que los segmentos $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$, perpendiculares a *r*, van decreciendo a medida que se alejan de la perpendicular común *AB* y que la diferencia entre cada uno y el siguiente va disminuyendo, de manera que se tiene

$$\overline{AB} - \overline{A_nB_n} > \left(\overline{AB} - \overline{A_1B_1}\right).n.$$

El primer miembro de la desigualdad es siempre menor que $\overline{AB}$, mientras que el segundo miembro, para *n* suficientemente grande, es tan grande como se desee[30]. Con esta contradicción Lambert anuló la segunda hipótesis.



(Fig. 156)

En el dominio de la tercera hipótesis demostró que los segmentos citados van creciendo mientras se alejan de la perpendicular *AB*, sin que esto provoque ninguna situación absurda. Halló que el defecto de un polígono es proporcional a su área y la propiedad de aditividad del defecto (véase pág. 186 de este cap.). Y, notablemente, descubrió que

> ... mientras en la geometría ordinaria a la medida de los segmentos corresponde solamente un significado relativo a la elección de una particular unidad, en la geometría fundada en la tercera hipótesis se puede, en cambio, conferirle un significado absoluto (Bonola, 1945: 58)[31].

La clara escritura de Bonola nos permite dilucidar este aspecto un poco más:

> En muchas cuestiones acontece que los elementos que se suponen dados se pueden dividir en dos grupos, de modo que los del primer grupo permanezcan fijos en todo el campo de nuestras consideraciones, mientras que los del segundo grupo puedan variar... Cuando esto ocurre, se suele frecuentemente prescindir de la explícita mención de los datos del primer grupo, y considerar como relativo todo lo que depende de los datos variables y como absoluto todo lo que depende solamente de los datos fijos (...)

30 Por el axioma de Arquímedes y *admitiendo que la recta es infinita en extensión*, al igual que para el absurdo obtenido en la demostración de Legendre del cap. 7.

31 Los párrafos que siguen son continuación de éste.

> Viniendo ahora a la Geometría, observamos que, en todo estudio concreto, generalmente se suponen dadas ciertas figuras y la magnitud de sus elementos; pero además de estos datos variables (del segundo grupo), que pueden ser elegidos de un modo arbitrario, están siempre presupuestas, implícitamente, las figuras fundamentales (datos fijos o del primer grupo). Entonces, toda construcción, toda medida, toda propiedad de una figura cualquiera deberá considerarse como relativa si es esencialmente relativa a los datos variables; deberá, en cambio, llamarse absoluta si es relativa solamente a los datos fijos (figuras fundamentales), (...)
>
> En este sentido es claro que en la geometría ordinaria la medida de los segmentos tiene necesariamente un significado relativo. En efecto, la existencia de las transformaciones por semejanza no nos permite individualizar de algún modo la magnitud de un segmento respecto a las figuras fundamentales (recta, haz, etcétera). Para el ángulo, en cambio, se puede escoger un modo de medida que expresa una propiedad absoluta suya; basta, en efecto, tomar la relación entre el ángulo y un giro, esto es, el haz completo, que es una de las figuras fundamentales.

En la tercera hipótesis se puede hacer corresponder a todo segmento un cierto ángulo; luego, aquél se relaciona con la figura fundamental “haz” y por ende, a su medida puede atribuírsele un significado absoluto. Recuérdese en este punto el parámetro de la geometría hiperbólica (k), que fija el “tamaño” de la misma.

Es interesante notar que sumando las medidas de dos segmentos no resultan sumados los ángulos correspondientes. Es posible, sin embargo, hallar una función del ángulo que tenga esta característica y asociar a cada segmento no el ángulo, sino el valor correspondiente al ángulo según esa función. Ella da una medida absoluta de los segmentos. La “unidad absoluta” o “natural” es el segmento para el cual la función toma el valor 1.

Lambert rechaza la tercera hipótesis negando que exista una unidad absoluta para los segmentos. Un nuevo axioma equivalente al V de Euclides, que podemos añadir a nuestra lista es el “postulado de Lambert”: *no existe una unidad absoluta para los segmentos.*

Si bien todo esto y tantas otras cosas vistas y por ver son muy interesantes, no es mi intención extenderme en el asunto. Ojalá que el lector sienta curiosidad, se le generen más preguntas que respuestas (eso sí que es tarea de un docente) y procure por sí mismo ahondar en algún aspecto que le atraiga.

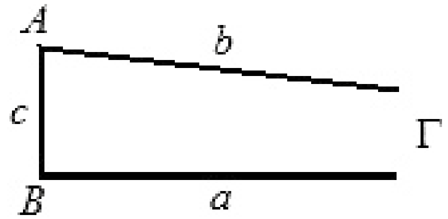
Un toque de trigonometría

Por último, para este capítulo que nos ocupa, haremos algunas consideraciones sobre la trigonometría hiperbólica (Bonola, 1921: 347 y ss.), a fin de adquirir una somera noción de ella.

En triláteros rectángulos

Ya se demostró en este capítulo la fórmula de Lobachevski para un trilátero rectángulo, que relaciona distancia y ángulo de paralelismo:
$\tan(\alpha/2) = e^{-d/k}$ (1)

Para una notación más sencilla pondré “–*c*” en vez de “–*d/k*”, y adoptaré el criterio conocido de nombrar lados y ángulos opuestos de los triláteros con la misma letra en minúscula y mayúscula, respectivamente. Dado el trilátero *AB*Γ, rectángulo en *B*, *c* es el lado opuesto al ángulo impropio Γ del trilátero (Fig. 157).



(Fig. 157)

La fórmula (1) queda entonces

$\tan(A/2) = e^{-c}$. (1’)

Recurrimos a la función *coseno hiperbólico*[32], $cosh = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, para obtener la fórmula

$\cos h = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}$. **(2)**

En efecto, si ahora nuestro querido lector reemplaza (1’) en la expresión de cosh *x,* con *x* = *c,* podrá obtener (2), y habrá realizado un lindo ejercicio de trigonometría[33].

Análogamente con el *seno hiperbólico* senh *x* = $(e^x - e^{-x})/2$, se llega a:

$\operatorname{senh} \boldsymbol{C} = \dfrac{1}{\tan A}$. **(3)**

Dividiendo miembro a miembro (3) por (2) resulta:

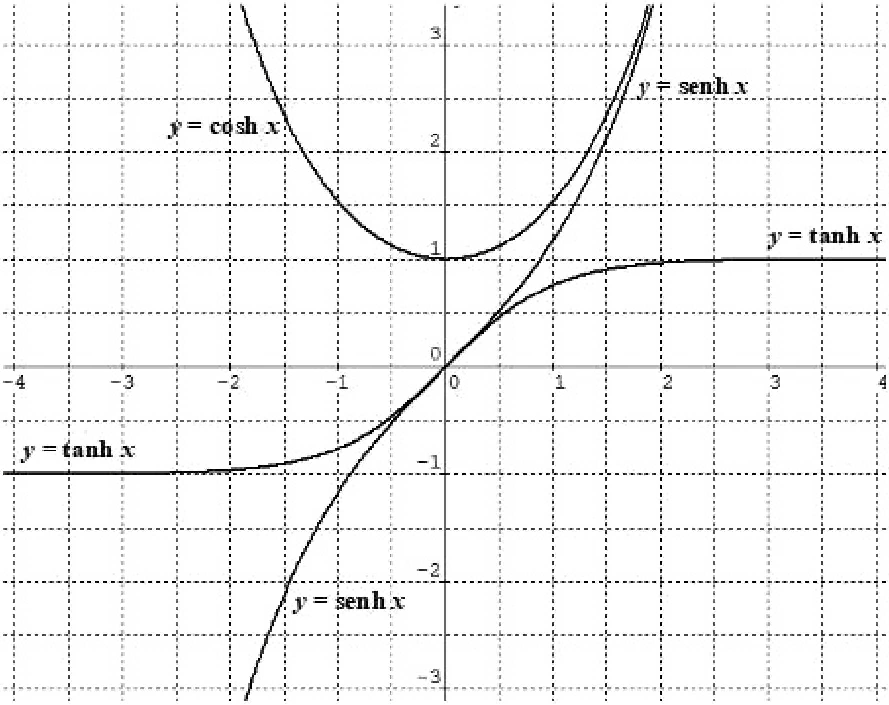
tanh *c* = cos *A*. **(4)**

(2), (3) y (4) son las relaciones trigonométricas de un trilátero rectángulo pero, en realidad, no son independientes ya que pueden obtenerse una de otra. Los únicos dos elementos variables (y ligados) de estos triláteros son *c* y *A*.

En la Fig. 158 vemos las gráficas de las tres funciones trigonométricas hiperbólicas mencionadas (los carteles dobles son para evitar confusiones).

32 Las funciones trigonométricas hiperbólicas (seno, coseno, tangente hiperbólicos) *no* deben su nombre a la geometría hiperbólica sino a la curva hipérbola, por consideraciones que el lector (en caso de desconocerlas) podría investigar. Véase la Fig. 158.

33 En el último paso de su trabajo deductivo el lector deberá usar la fórmula del seno del ángulo doble: sen(2α) = 2 senα cosα (obviamente que con *A* en vez de α), un poco relegada de los estudios escolares de trigonometría. Corre igual suerte la del coseno del ángulo doble: $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$.



(Fig. 158) Gráficas de seno, coseno y tangente hiperbólicos.

Ahora vamos a entretenernos con algunos cálculos particulares, así que, si le place, tome el lector calculadora científica, lápiz y papel.

Sea el trilátero rectángulo $AB\Gamma$ (Fig. 157). Hagamos preguntas:

¿Cuánto mide el ángulo de paralelismo A para $c = 1{,}5$?

De (2) es:

$\operatorname{sen} A = 1/\cosh(1{,}5) \cong 0{,}4251$,

de donde

$A = \operatorname{sen}^{-1} 0{,}4251 \cong 25{,}157°$.

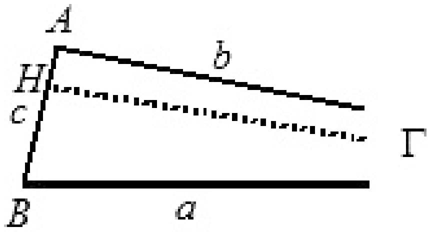
Recuérdese que A debe ser agudo por ser ángulo de paralelismo.

¿Cuánto mide A para $c = 9$ y para $c = 0{,}05$?

Para $c = 9$ nos da $A \cong 0{,}014°$ (¡pequeño!) y para $c = 0{,}05$, $A \cong 87{,}136°$. Ya sabemos esto. Puede experimentarse con valores mayores de c y, rápidamente, el coseno hiperbólico en (2) crecerá y tanto el seno de A, como A, tenderán a 0. Por otra parte, si c tiende a 0, el coseno hiperbólico tiende a 1, el seno de A también y A, a 1R.

¿El valor c utilizado es la distancia de paralelismo? No. Es d/k. Pongamos un valor (positivo) a k y podremos calcular la distancia d. Por ejemplo, asumiendo $k = 4$, si $c = 9$ entonces $d = 36$. Si $c = 0{,}05$, $d = 0{,}2$. Se aprecia cómo k determina el tamaño de las distancias. Solo si $k = 1$ c es distancia de paralelismo.

En triláteros cualesquiera



(Fig. 159)

Para un trilátero *cualquiera* $AB\Gamma$ (se entiende que siempre con dos lados paralelos) como el de la Fig. 159 se demuestran las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{senh} c = \frac{\cos A + \cos B}{\operatorname{sen} A \ \operatorname{sen} B}, \ (5)$$

$$\cosh c = \frac{1 + \cos A \ \cos B}{\operatorname{sen} A \ \operatorname{sen} B}, \ (6)$$

$$\tanh c = \frac{\cos A + \cos B}{1 + \cos A \ \cos B}. \ (7)$$

La línea de trazos $H\Gamma$ es la perpendicular a AB por Γ. Las fórmulas dadas son válidas siempre que el pie de la perpendicular, H, se ubique entre A y B. Si H está en una prolongación de $\overline{AB}$, las fórmulas difieren. La deducción (que no incluyo) se basa en aplicar las fórmulas del trilátero rectángulo en los dos triláteros que resultan al trazar $H\Gamma$ y el hecho de que $c = \overline{AH} + \overline{HB}$[34].

Hagamos algún cálculo concreto. Sean $A = 100°$ y $c = 2$ en el $AB\Gamma$. ¿Cuánto mide B?

De (5) resulta: $\operatorname{senh} 2 = (\cos 100° + \cos B)/(\operatorname{sen} 100° \operatorname{sen} B) \Rightarrow \operatorname{senh} 2 \operatorname{sen} 100° \operatorname{sen} B = \cos 100° + \cos B$.

Elevando al cuadrado miembro a miembro obtenemos:

$\operatorname{senh}^2 2 \operatorname{sen}^2 100° \operatorname{sen}^2 B = \cos^2 100° + 2 \cos 100° \cos B + \cos^2 B$.

Reemplazando $\operatorname{sen}^2 B$ por $(1 - \cos^2 B)$ e igualando a 0 queda:

$\cos^2 B(1 + \operatorname{senh}^2 2 \operatorname{sen}^2 100°) + \cos B(2 \cos 100°) + (\cos^2 100° - \operatorname{senh}^2 2 \operatorname{sen}^2 100°) = 0$

que es una ecuación cuadrática en $\cos B$. Tomando valores aproximados es:

$13{,}757 \cos^2 B - 0{,}347 \cos B - 12{,}727 = 0$.

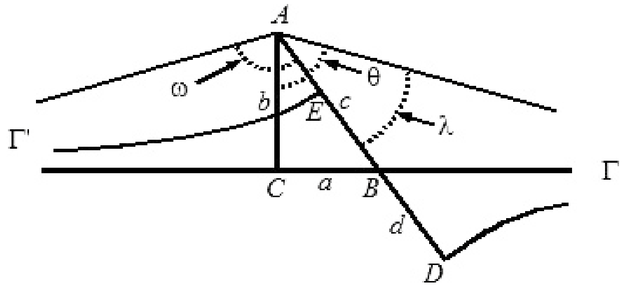
34 Para todo este tema véase Bonola (1921: art. XII) y Bonola (1945).

Las soluciones $\cos_1 B \cong 0{,}975$, $\cos_2 B \cong -0{,}949$. El segundo valor no sirve (pues B resulta obtuso para ese coseno). Luego $B \cong \cos^{-1} 0{,}975 = 12{,}839°$.

Nótese que si conocemos los ángulos A y B (el ángulo en el vértice impropio vale 0°), podemos calcular el lado propio c. ¡Esto no es practicable en la trigonometría euclidiana, en la cual es necesario tener al menos un lado conocido para poder "resolver" el triángulo! Se sabe que infinitos triángulos euclidianos semejantes tienen sus ángulos homólogos iguales.

En triángulos rectángulos

Tengamos en consideración un triángulo rectángulo ACB, rectángulo en C, con todos sus elementos propios (Fig. 160).



(Fig. 160)

Γ y Γ' son los puntos impropios de la recta CB. Unimos A con Γ (o sea que trazamos $A\Gamma \parallel CB$) y construimos $D\Gamma \perp AB$. También dibujamos $A\Gamma' \parallel BC$ y $E\Gamma' \perp AB$. Por tener iguales sus pares de ángulos propios, resultan congruentes los triláteros $DB\Gamma$ y $EB\Gamma'$. Sea $\overline{BE} = \overline{BD} = d$.

Ahora se detallan algunas *distancias* y sus *ángulos de paralelismo* respectivos:

- para la distancia b es $\angle CA\Gamma = \angle CA\Gamma' = \theta$;

- para $(c + d) = \overline{AD}$ es $\angle DA\Gamma = \lambda$;

- para $(c - d) = \overline{AE}$ es $\angle EA\Gamma' = \omega$.

Por lo tanto se tiene (no se olvide que A es ángulo del triángulo ACB):

$\theta = A + \lambda$, (1) y

$\theta = \omega - A$. (2)

Se demuestra (no aquí) que la igualdad (2) sigue valiendo aunque el punto E coincida con A, o quede en la prolongación de $\overline{BA}$.

Ahora vamos a armarnos de valor. Sumando miembro a miembro (1) y (2) se tiene:

$2\theta = \omega + \lambda$, (3)

y restando miembro a miembro (1) y (2):

$2A = \omega - \lambda$. (4)

"Ponemos" cosenos en cada miembro de (3):

$\cos(2\theta) = \cos(\omega + \lambda)$,

o sea

$\cos(2\theta) = \cos \omega \cos \lambda - \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \lambda$. (5)

Ahora invocamos la fórmula del coseno del ángulo doble:

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\theta$,

de donde resulta:

$2 \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$.

Reemplazando (5) en esta última igualdad, obtenemos

$2 \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos \omega \cos \lambda + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \lambda$. (6)

Recurrimos a las fórmulas del trilátero rectángulo (2), (3) y (4) vistas antes para obtener en (6) (¿se anima?):

$$\frac{2}{\cosh^2 b} = \frac{\cosh(c-d)\cosh(c+d) - \operatorname{senh}(c-d)\ \operatorname{senh}(c+d) + 1}{\cosh(c-d)\ \cosh(c+d)}.$$

Continúa la odisea aplicando la fórmula del coseno y seno hiperbólicos de la suma o resta de dos ángulos[35], llegando, luego de un concentrado esfuerzo (¡vamos, no se achique!), a que:

$$\frac{1}{\cosh^2 b} = \frac{\cosh^2 d}{\cosh^2 c\ \cosh^2 d - \operatorname{senh}^2 c\ \operatorname{senh}^2 d},$$

y de esto escribimos el recíproco:

$\cosh^2 b = \cosh^2 c - \operatorname{senh}^2 c\ \tanh^2 d$. (7)

(Un respiro... tic, tac, tic, tac...). Sigamos: de (4) del trilátero rectángulo se deduce que

$\tanh^2 d = \cos^2 B$ (8);

35 $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$, $\cosh(x - y) = \cosh x \cosh y - \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$, $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$, $\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y$. Además se utiliza la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

además

$\cosh^2 b = 1 + \operatorname{senh}^2 b, \qquad \cos^2 B = 1 - \operatorname{sen}^2 B$, (9)

por lo tanto, poniendo (8) y (9) en (7), y tomando raíz cuadrada miembro a miembro (lo cual es posible pues senh b, senh c y sen B son positivos) resulta la primera fórmula fundamental del triángulo rectángulo:

$\operatorname{senh} b = \operatorname{senh} c \operatorname{sen} B$. (10)

Otra fórmula se consigue cambiando b por a y B por A:

$\operatorname{senh} a = \operatorname{senh} c \operatorname{sen} A$. (11)

Una tercera surge tomando cosenos en ambos miembros de (4), lo que nos lleva a:

$\cosh c = \cot A \cot B$. (12)

Otras expresiones pueden derivarse de (10), (11) y (12).

Veamos para finalizar esta parte, un ejemplo particular. Sea el ACB de la Fig. 160 con hipotenusa $c = 2$ y $B = 35°$. Ya sabemos que $C = 1R$. Usamos (10) para calcular b:

$b = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{senh} 2 \operatorname{sen} 35°) \cong 1{,}48$.

Con (12) calculamos A; previamente la adaptamos un poco:

$\cot A = \cosh c / \cot B = \cosh c \tan B \Rightarrow \tan A = 1 / (\cosh c \tan B)$, luego:

$A = \tan^{-1} [1 / (\cosh 2 \tan 35°)] \cong 20{,}8°$.

Falta calcular la longitud del cateto a. Aplicamos (11):

$a = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{senh} c \operatorname{sen} A) \cong \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{senh} 2 \operatorname{sen} 20{,}8°) \cong 1{,}07$.

Para el ACB tenemos, finalmente,

$S_i = 90° + 35° + 20{,}8° = 145{,}8°$ y $\delta = 180° - 145{,}8° = 34{,}2°$. ¡Puf!

En triángulos oblicuángulos

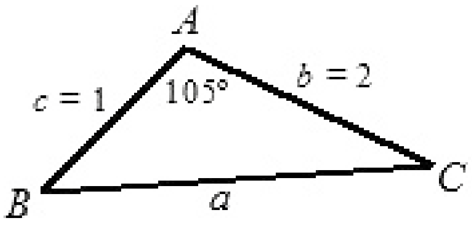
Las fórmulas fundamentales para los triángulos oblicuángulos (no se incluye la demostración) son estas:

senh a / sen A = senh b / sen B = senh c / sen C, (13)

cosh a = cosh b cosh c – senh b senh c cos A, (14)

cos A = –cos B cos C + sen B sen C cosh a. (15)

Resolvamos un caso particular para un triángulo ABC con $b = 2$, $c = 1$ y $A = 105°$ (Fig. 161).



(Fig. 161)

De (14) se tiene que

cosh a = cosh 2 cosh 1 – senh 2 senh 1 cos 105° ≅ 6,908 ⇒ a ≅ 2,62.

Luego, usando (13) se calculan B ≅ 30,9° y C ≅ 9,6°.

Además, S_i = 105° + 30,9° + 9,6° = 145,5° y d = 180° – 145,5° = 34,5°.

[Capítulo 11]

Modelos para la geometría hiperbólica

Una geometría no puede ser más verdadera que otra; sólo es más conveniente[1].

En el Capítulo 5 sobre axiomática se dijo que para sostener la consistencia de un sistema de axiomas debe hallarse un modelo o "traducción" válido, de sus entes y relaciones primitivas, en términos de entes y relaciones de otra rama de la matemática. Se trata de confeccionar un "diccionario" tal que los axiomas y teoremas del primer sistema se convierten en otros, igualmente, coherentes para los objetos del segundo sistema.

Sorprendentemente, un modelo para la geometría hiperbólica puede construirse con elementos de la geometría euclidiana. Se utilizan objetos y relaciones seleccionados de esta geometría y se los dispone de manera que en ese "aparato" funcionen los axiomas y los teoremas hiperbólicos a la perfección. Análogamente, es posible construir en la geometría hiperbólica un modelo de la euclidiana, lo que además trae aparejado que sus consistencias están casadas: si una de ellas fuera contradictoria... ¡la otra también lo sería! (Moise, 1974: caps. 25 y 26).

Hay tres modelos muy conocidos elaborados por los matemáticos, ya citados, Henri Poincaré, Eugenio Beltrami y Félix Klein. Son:

a - el modelo del disco de Poincaré;

b - el modelo del disco de Beltrami-Klein;

c - el modelo del semiplano superior de Poincaré.

Cada construcción modélica se apoya sobre una minuciosa base matemática. No consiste en un trivial cambio de términos junto a unos curiosos dibujos, sino en un desarrollo que fundamenta, sobre asientos sólidos, las teorías de ángulos, segmentos, distancia, congruencia, etc. Toda afirmación de la geometría hiperbólica tiene (así debe serlo) su correlato en el modelo. Profundizar en los modelos ocuparía un considerable espacio y un mayor estudio, por lo que comentaré brevemente lo más visual de cada uno, y luego me detendré un poco en el modelo (a)[2].

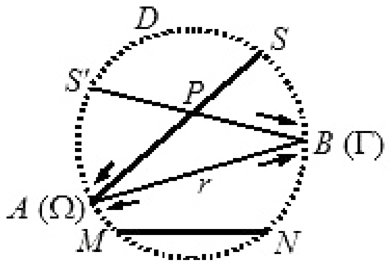
1 De *Ciencia e hipótesis* de H. Poincaré, citado en Coxeter (1971: 328).

2 Los modelos (a) y (b) están relacionados. Véase Coxeter (1971: 328-331).

Vistazo al modelo de Beltrami-Klein

Se considera (Fig. 162) un círculo o disco abierto *D,* es decir, sin la circunferencia que lo limita. *D* representa el plano hiperbólico[3].

Los puntos hiperbólicos son los puntos de *D.* Las rectas hiperbólicas son las cuerdas de *D,* que también son abiertas, sin extremos y, por lo tanto, no tienen ni primero ni último punto.



(Fig. 162) El disco de Beltrami-Klein.

En la figura se han trazado las rectas *MN, r = AB, BS'* y *AS.* Estas últimas pasan por un mismo punto *P.* Vemos que *AS* y *AB* comparten el "extremo" *A* (que en realidad no es tal, por ser abiertas las cuerdas). En el modelo diremos que *BA // SA* (nótese el orden de las letras en la notación de las rectas).

También *S'B* y *AB* comparten el "extremo" *B;* diremos que *AB // S'B.* ¡Justamente, tenemos allí las dos paralelas hiperbólicas a la recta *r* por *P,* y aquí vale el postulado de Lobachevski! Las flechas de la figura muestran los sentidos de paralelismo. Entre paréntesis se indican las letras griegas Ω y Γ, que representan los puntos impropios donde se encuentran las paralelas, en el infinito. La línea punteada, por lo tanto, representa los infinitos puntos impropios de las infinitas rectas-cuerdas del plano-disco.

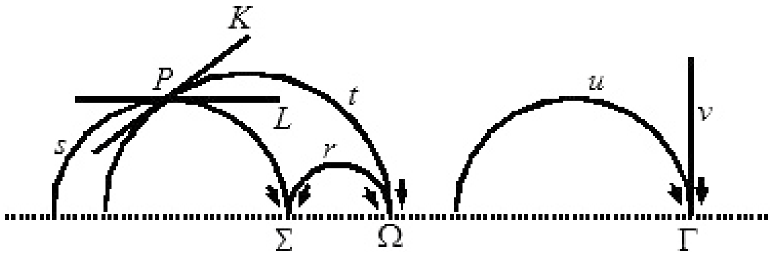
La recta *MN* que no es secante con *AB* ni paralela a ella, es ultraparalela a *AB.* También son ultraparalelas a *MN* las rectas *AS* y *S'B.*

Este modelo se denomina proyectivo pues conserva la "rectitud" de la recta en un sentido visual; sin embargo no mantiene el valor de los ángulos entre rectas.

3 Si bien no es necesario, un círculo unitario simplifica fórmulas y cálculos.

Vistazo al modelo de Poincaré del semiplano superior

En este "diccionario" el plano hiperbólico está representado por el semiplano abierto $x > 0$; en términos coloquiales: el semiplano que está por sobre el eje *x*, excluyendo a dicho eje (Fig. 163).



(Fig. 163) El semiplano superior de Poincaré.

Las rectas hiperbólicas son semicircunferencias centradas en el eje *x* (como *r, s, t* y *u*) o bien semirrectas verticales con origen en el eje *x* (como *v*). En la figura las rectas *t* y *s* se cortan en *P.*

Las rectas *r* y *t* son paralelas (las flechas indican el sentido de paralelismo) y Ω es el punto impropio que comparten en el infinito. También son paralelas *s* y *r, u* y *v.* Σ y Γ son los respectivos puntos impropios en común. Puede verse que *s* y *t* son las dos paralelas hiperbólicas a *r* por *P.* Ejemplos de ultraparalelas son *r* y *u, t* y *v,* etc.

Este modelo se denomina conforme porque conserva los ángulos entre rectas. La medida de un ángulo es la del que forman las tangentes a las semircunferencias en el vértice (por ejemplo, la medida del $\angle \Omega P \Sigma$ que determinan *s* y *t* en *P,* es la del $\angle KPL$[4].

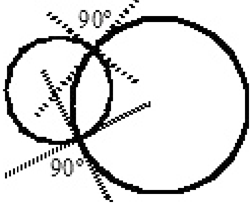
El modelo del disco de Poincaré

En esta representación el plano hiperbólico es un disco o círculo abierto *D.* Las rectas son

a) los diámetros de *D* y

b) los arcos que resultan de la intersección entre *D* y circunferencias ortogonales a *D.*

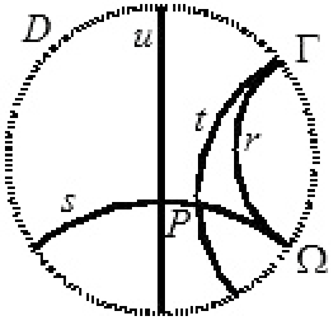
Dos curvas secantes son ortogonales si las tangentes a ambas en el punto de intersección son perpendiculares. Si dos circunferencias secantes en dos puntos son ortogonales, lo son en ambos puntos simultáneamente (Fig. 164).



(Fig. 164) Circunferencias ortogonales.

4 Para indagar algo más en este modelo puede verse Smogorzhevski (1978).

Las rectas que “comparten” un punto del “borde” son paralelas, como en el modelo de Beltrami-Klein. En la Fig. 165 vemos las rectas *s* y *t* secantes en *P* y también *s* // *r* y *t* // *r* (las paralelas hiperbólicas a *r* por el punto *P*, siendo Ω y Γ los puntos impropios donde concurre cada par de paralelas). Además *u* y *r*, *u* y *t* son ultraparalelas (Moise, 1974: Cap. 9).



(Fig. 165) El disco de Poincaré.

Este modelo, como el del semiplano superior, es conforme. El ángulo entre dos rectas es el que forman sus tangentes en el punto de intersección. Quedan otras cosas para comentar. Ahora, un breve interludio.

La función de distancia

Así como sucede con el área (véase cap. 10, pág. 186), la distancia se define como una función que cumple con ciertos axiomas. Si tenemos dos puntos, *A* y *B*, de un plano, una distancia entre ellos, muy familiar para nosotros, está dada por la fórmula

$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (1)

siendo (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas cartesianas de *A* y *B*, respectivamente. Se trata esta de la distancia euclidiana. Esto es extensible al espacio, como se sabe, agregando una tercera coordenada, pero nos mantendremos en el plano.

Dado un conjunto *P* de puntos y *A*, *B*, *C*, puntos cualesquiera de *P*, una distancia o métrica es una función

$d: P \times P \rightarrow R$[5]

que asigna a cada par de puntos de *P* un número real, con estas condiciones:

a) $d(A,B) \geqslant 0$ (la distancia nunca es negativa);

b) $d(A,B) = 0$ si y solo si $A = B$ [o también $d(A, A) = 0$];

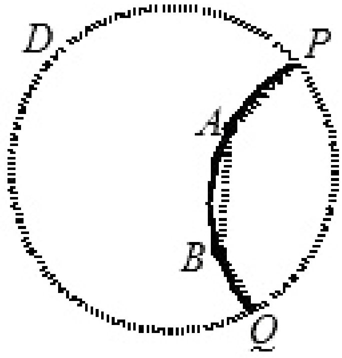
c) $d(A,B) = d(B,A)$;

d) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ (esta es la desigualdad triangular).

5 Recuérdese que $P \times P$ indica el *producto cartesiano* de *P* por sí mismo.

La distancia euclidiana cumple con estos cuatro requisitos (cosa que aquí no verificaremos), pero no debemos pensar que es la única distancia posible. En efecto, para el disco de Poincaré se define una métrica que en seguida pasaremos a ver.

Distancia en el modelo de Poincaré



(Fig. 166)

En *D* (Fig. 166) consideramos la recta *AB* [o sea el arco (*PQ* de trazo continuo]. *P* y *Q* son los dos puntos impropios de *AB*.

Se define la función distancia o métrica:

$d(A,B) = \left|\log\left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}\right]\right|$, (2)

donde $\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{BP}, \overline{BQ}$, representan las longitudes *euclidianas* de los segmentos dibujados con líneas de trazos, calculadas con la fórmula (1)[6].

El doble cociente encerrado entre corchetes se denomina “razón doble de los puntos *A, B, P, Q*” (en ese orden), y se simboliza (*A, B; P, Q*)[7]. Los segmentos de la razón doble son orientados, por lo tanto, establecido un sentido positivo en la recta *AB,* podrán ser positivos o negativos los valores incluidos en la fórmula.

Con la distancia definida por (2) analizamos los axiomas (a) a (d) dela sección anterior.

- (a) resulta de inmediato por el valor absoluto en (2).

- Para (b): si *B* = *A*: $d(A,A) = \left|\log\left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\right]\right| = \log 1 = 0.$

- Para (c): $d(A,B) = \left|\left(\log(A,B;P,Q)\right)\right| =$

6 Más correctamente, habría que poner los segmentos entre barras para indicar su longitud, pero es preferible no recargar la notación.

7 Para ampliar sobre la razón doble véase, por ejemplo, Ayres (1971: cap. 2).

$= \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \right] \right| = \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \right] \right| = \left| \log \left[\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \right] \right| =$

$= \left| \left(\log(B, A; Q, P) \right) \right| = d(B, A).$

- Para (d): $d(A,C) + d(C,B) = \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} \right] \right| + \left| \log \left[\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \right] \right|$. (3)

Aplicando una propiedad del valor absoluto resulta que

(3) $\geq \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} \right] + \log \left[\frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \right] \right| =$

$= \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \right] \right|$ (propiedad de logaritmos) =

$= \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \right] \right| = \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \right] \right| =$

$= \left| \log \left[\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} : \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \right] \right| = d(A, B)$. ¡Demostrado!

Antes de seguir con otros análisis, veamos un ejemplo elegido arbitrariamente. Será nuestro disco de Poincaré un círculo abierto de radio 1, con centro en el origen de coordenadas, descripto analíticamente por la inecuación

$x^2 + y^2 < 1.$

Tomemos como recta el arco (PQ, que surge de la intersección del disco con alguna circunferencia ortogonal a la $x^2 + y^2 = 1$, como puede ser la

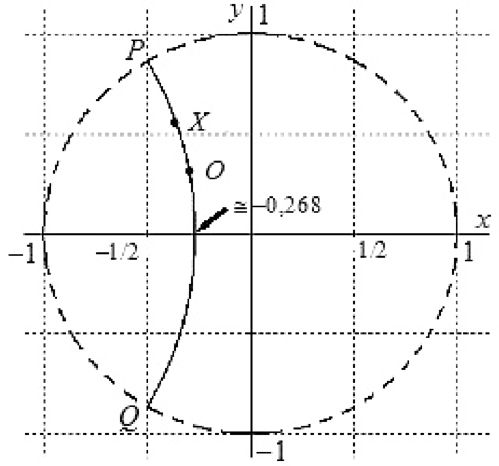
$(x + 2)^2 + y^2 = 3$

(véase la Fig. 167)[8]. Los extremos del arco (¡calcule!) son los puntos

$$P = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right), Q = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

que, si bien pertenecen al plano euclidiano sobre el que se asienta el modelo, representan puntos impropios del plano hiperbólico.

8 Se ha elegido esa circunferencia como podría haberse escogido cualquier otra. La ecuación fue determinada con las herramientas de la geometría analítica, fijando la condición de ser ortogonal a la $x^2 + y^2 = 1$. No incluyo aquí el procedimiento, pero es un lindo ejercicio por si el lector quiere hacerlo.



(Fig. 167)

Las abscisas x de los puntos del arco (PQ cumplen la desigualdad:

$$-\frac{1}{2} < x < \sqrt{3} - 2, (*)$$

donde $\sqrt{3} - 2$ es aproximadamente igual a –0,268. La elección del arco de circunferencia ortogonal [en nuestro ejemplo, (PQ] determina el dominio de la variable x, esto es, las abscisas de los puntos de la recta-arco en nuestro plano cartesiano euclidiano.

Ahora vamos a establecer sobre la recta-arco PQ un sistema de coordenadas. Para ello tomemos un punto fijo cualquiera que funcionará de origen. Podemos escoger cualquier punto de la circunferencia $(x + 2)^2 + y^2 = 3$, cuya abscisa respete la desigualdad (*). Sea nuestro origen el punto $O = \left(-0{,}3; \sqrt{11}/10\right)$. ¿De dónde salió? Simplemente se me ocurrió antojadizamente tomar $x = -0{,}3$ y despejar un valor de y de la ecuación de la circunferencia citada[9].

Consideramos un punto X variable y calcularemos su distancia al origen, en dos situaciones:

a) partiendo de O y aproximándose a P;

b) partiendo de O y acercándose a Q.

La distancia hiperbólica definida por (2), adaptada a nuestro análisis resulta:

$$d(O,X) = \left|\log\left[\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} : \frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}}\right]\right| = |\log(O,X,P,Q)|.$$

Ahora bien, si se omite en ella el valor absoluto, se obtiene como resultado un número real positivo en el caso (a), negativo en el caso (b) y cero si X coincide con O. Estos resultados bien pueden ser considerados las coordenadas de X. Luego, si llamamos $C(X)$ a la coordenada de X:

$$C(X) = \log\left[\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} : \frac{\overline{XP}}{\overline{XQ}}\right] = \log(O,X,P,Q). (4)$$

9 Digo *un* valor porque al despejar se obtienen dos valores opuestos de y.

Veamos algunos números en la tabla siguiente (se omite la notación de segmentos):

Abs. *X*	**Ord. *X***	***OP***	***OQ***	***XP***	***XQ***	**(*O,X;P,Q*)**	***d*(*O,X*)**	***C*(*X*)**
-0,3	0,33166	-0,571	1,214	-0,57057102704220800	1,2142739955	1,00000149	0,00	0,00
-0,4	0,66332	-0,571	1,214	-0,22603394457470300	1,5326158757	3,186055403	0,50	0,50
-0,45	0,77298	-0,571	1,214	-0,10563286657096800	1,6397724782	7,294208871	0,86	0,86
-0,49	0,84847	-0,571	1,214	-0,02020776088536290	1,7145291628	39,86762366	1,60	1,60
-0,499	0,86429	-0,571	1,214	-0,00200688813838736	1,7303202890	405,1324234	2,61	2,61
-0,4999	0,86585	-0,571	1,214	-0,00020591260281970	1,7318800029	3952,105571	3,60	3,60
-0,49999	0,86601	-0,571	1,214	-0,00002236067977500	1,7320400000	36397,08334	4,56	4,56
-0,499999	0,86602	-0,571	1,214	-0,00001004987562108	1,7320500000	80982,91509	4,91	4,91
-0,4999999	0,86603	-0,571	1,214	-0,00000010000000000	1,7320600000	8138729,23	6,91	6,91
-0,49999999	0,86603	-0,571	1,214	-0,00000001000000000	1,7320600000	81387292,34	7,91	7,91
-0,499999999	0,86603	-0,571	1,214	-0,00000000099999997	1,7320600000	813872945,8	8,91	8,91
-0,5	0,86603	-0,571	1,214	-0,00000000010000001	1,7320600000	8138728579	9,91	9,91
-0,4999999999999	0,86603	-0,571	1,214	-0,0000000000000009998	1,7320600000	8,14068E+12	12,91	12,91
-0,49999999999999	0,86603	-0,571	1,214	-0,0000000000000000999	1,7320600000	8,14525E+13	13,91	13,91

- En las columnas 1 y 2 aparecen la abscisa y la ordenada de *X,* en el plano cartesiano del modelo; *X* tiende a *P* sobre la recta *PQ* (Fig. 167).

- En las columnas 3, 4, 5 y 6, las cuatro distancias euclidianas que intervienen en la razón doble (*O,X;P,Q*); esta última se anota en la columna 7.

- En la columna 8: la distancia de *X* al origen de coordenadas, según la métrica establecida por (2); véase, en el primer renglón, que la distancia es 0 cuando coinciden *X* y *O;* como la razón doble tiende a $+\infty$, también lo hacen el logaritmo y esta distancia.

- En la columna 9: el resultado de aplicar (4), lo que significa que las coordenadas de *X* sobre la semirrecta-arco (*OP* son positivas. Obsérvese el aumento de *C*(*X*) a medida que *X* se aproxima al borde del disco. (*OP* es aquí un “semieje positivo” en el sistema de coordenadas lineales establecido en (*PQ*.

Ahora analicemos otra tabla calculada para *X* “viajando” desde *O* hasta *Q*.

Abs. *X*	**Ord. *X***	***OP***	***OQ***	***XP***	***XQ***	**(*O,X;P,Q*)**	***d*(*O,X*)**	***C*(*X*)**
-0,3	0,33166	-0,571	1,214	-0,5705710270	1,21427399548043	1,000001490407140	0,00	0,00
-0,267949192	0,00000	-0,571	1,214	-0,8965799118	0,89657991177216	0,469887257364507	0,33	-0,33
-0,3	-0,33166	-0,571	1,214	-1,2142739955	0,57057102704221	0,220793705561023	0,66	-0,66
-0,4	-0,66332	-0,571	1,214	-1,5326158757	0,22603394457470	0,069300124036491	1,16	-1,16
-0,45	-0,77298	-0,571	1,214	-1,6397724782	0,10563286657097	0,030269771338378	1,52	-1,52
-0,49	-0,84847	-0,571	1,214	-1,7145291628	0,02020776088536	0,005538178962522	2,26	-2,26
-0,499	-0,86429	-0,571	1,214	-1,7303202890	0,00200688813839	0,000544992259062	3,26	-3,26
-0,4999	-0,86585	-0,571	1,214	-1,7318800029	0,00020591260282	0,000055867443492	4,25	-4,25
-0,49999	-0,86601	-0,571	1,214	-1,7320400000	0,00002236067978	0,000006066256260	5,22	-5,22
-0,499999	-0,86602	-0,571	1,214	-1,7320500000	0,00001004987562	0,000002726427350	5,56	-5,56
-0,4999999	-0,86603	-0,571	1,214	-1,7320600000	0,00000010000000	0,000000027128809	7,57	-7,57
-0,49999999	-0,86603	-0,571	1,214	-1,7320600000	0,00000001000000	0,000000002712881	8,57	-8,57
-0,499999999	-0,86603	-0,571	1,214	-1,7320600000	0,00000000100000	0,000000000271288	9,57	-9,57
-0,5	-0,86603	-0,571	1,214	-1,7320600000	0,00000000010000	0,000000000027129	10,57	-10,57
-0,4999999999999	-0,86603	-0,571	1,214	-1,7320600000	0,00000000000010	0,000000000000027	13,57	-13,57
-0,49999999999999	-0,86603	-0,571	1,214	-1,7320600000	0,00000000000001	0,000000000000003	14,57	-14,57

Observemos:

- Nuevamente, al inicio de la tabla, sucede lo esperable: cuando *X* y *O* coinciden, *d*(*O,X*) y *C*(*X*) valen 0.

- Como detalle, se incluyó en la tabla el valor máximo de abscisa posible para el arco-recta (*PQ*: $\sqrt{3} - 2$. *C*(*X*) en esta posición es –0,33.

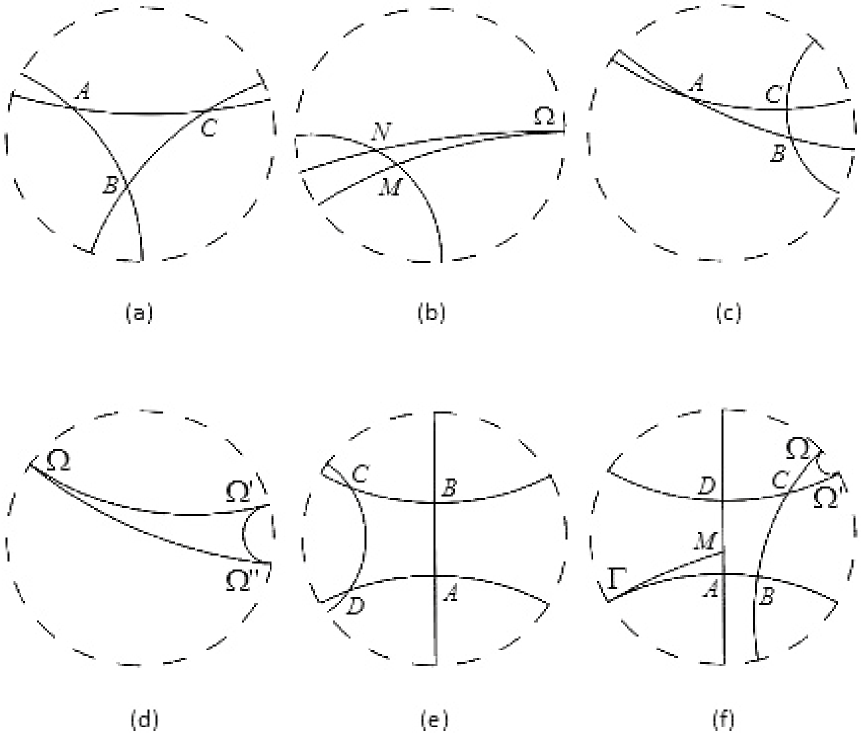
- La razón doble tiende a 0 por valores positivos; luego el logaritmo en (4) tiende a –∞, al igual que *C*(*X*) (columna 9). La distancia tiende a +∞. De modo que la semirrecta-arco (*OQ* funciona como semieje *x* negativo.

Consecuencia de lo que acabamos de ver es que, aunque las rectas-cuerdas se vean finitas, por la métrica definida tienen ciertamente longitud infinita, tal como se espera de las rectas hiperbólicas. Si fuéramos “habitantes” de la recta moviéndonos sobre ella, ¡jamás llegaríamos al borde del disco!

Contrariamente a lo que pueda parecer, todas las rectas-arco son equivalentes y el centro del círculo no tiene ningún significado especial.

Figuras en el modelo

Veamos cómo resultan representadas en esta construcción modélica algunas de las figuras que hemos estudiado. En la Fig. 168 vemos representados los siguientes objetos:



(Fig. 168)

- en (a), el triángulo acutángulo *ABC*[10];

- en (b), el trilátero obtusángulo *MN*Ω con ángulo obtuso en el vértice *M;*

- en (c), el triángulo *ACB* rectángulo en el vértice *C;*

- en (d), el trilátero límite ΩΩ'Ω'';

- en (e), el cuadrilátero birrectángulo isósceles *ABCD* con ángulos rectos en *A* y *B* (los otros ángulos son, obviamente, agudos; ¡desde aquí un saludito a Saccheri!); y

- en (f), el cuadrilátero trirrectángulo *ABCD* con ángulo agudo en *C,* el trilátero rectángulo *MA*Γ con ángulo recto en *A* y el trilátero doblemente asintótico Ω*C*Ω'.

Los lados de estos polígonos son partes de los arcos (o arcos completos) de circunferencias ortogonales al borde del disco.

10 Sabemos que es acutángulo porque las tangentes a los arcos, en cada vértice, forman ángulo agudo. Al ser el modelo conforme, como se dijo, los ángulos quedan preservados.

Fin de la aventura: el problema del Postulado V... ¡resuelto!

Los modelos a los cuales nos hemos aproximado dan, por fin, solución al "escándalo de la geometría". Hubo que esperar hasta fines del siglo XIX, no en vano denominado "siglo de la geometría" (Boyer, 1996: cap. XXIV), para que quedara claro ese horizonte tanto tiempo sumido en la oscuridad.

Se dijo en el cap. 5 que para probar que un axioma A_k es independiente (no deducible) de los demás axiomas $A_1, A_2, ..., A_{k-1}$ de un sistema compatible, se debe formar un nuevo sistema, $\{A_1, A_2, ..., A_{k-1}, \neg A_k\}$, cuya consistencia debe someterse a prueba y que, si resulta compatible, eso implica la independencia de A_k. ¡Y justamente eso es lo que sucede aquí!

En efecto, en cada uno de los modelos es posible verificar el cumplimiento de todos los axiomas de la geometría de Euclides, excepto el V (no entraré en esa prolongada tarea). Esto es: cualquier sistema de postulados euclidianos de incidencia, orden, congruencia y continuidad, como los que vimos, por ejemplo, en el cap. 6, es válido en las construcciones modélicas que describimos. ¡Pero en ninguno de los modelos se cumple el postulado euclidiano de la paralela única por un punto exterior a una recta, lo que demuestra que dicho axioma es independiente! Remito al lector nuevamente a las Figs. 162, 163 y 165, donde se ilustra esto.

Con frecuencia este ha sido para mí un momento delicioso en mis clases, pues tuve la bendición de observar en la mirada de mis alumnos (al menos de aquellos que estaban al día con la asignatura...), luego de unos segundos de "acomodamiento de ideas", ese destello especial, mezcla de sorpresa y alegría por el descubrimiento de la verdad, luego del esforzado camino.

Al fin resuelto el asunto: ¿postulado o teorema? ¡Postulado! Y es justo que haya aquí un tributo al genio de Euclides.

[Capítulo 12]

Una noción de la geometría elíptica

El postulado de Riemann

> ¿Puede conducir la hipótesis del ángulo obtuso a un sistema geométrico consistente si se supone que la recta no es infinita? La pregunta no habría sido de interés académico, salvo porque se cayó en la cuenta de que Saccheri dedujo interesantes consecuencias de esa hipótesis... (Gans, 1955: 66).

Una tercera geometría resulta de la adopción de un nuevo postulado de paralelismo, el de Riemann: *por un punto exterior a una recta no existe en su plano ninguna paralela a ella.* Esto es lo mismo que afirmar que en un plano todas las rectas se cortan.

Este postulado que nos ocupa ahora es equivalente a la *hipótesis del ángulo obtuso* de Saccheri. El lector recordará que en la Proposición XIII[1] él refutó tal hipótesis. Sin embargo, la refutación falla si se quita a la recta la propiedad de ser infinita en extensión. En efecto, si las rectas fueran *finitas*, nada aseguraría que se intersecten las de esa Proposición.

También cae el argumento de Legendre del cap. 7, pág. 124, pues los lados de los triángulos en las sucesivas construcciones realizadas no tenderían a infinito.

> En 1854, no mucho después que la solución del problema de las paralelas culminó en el descubrimiento de la geometría hiperbólica, la cuestión citada arriba se hizo inevitable, con el pronunciamiento de Riemann de que el espacio no necesita ser considerado infinito sólo porque parece ilimitado. La atención se dirigió entonces a la consideración de posibles sistemas de geometría en los cuales una línea recta, aunque ilimitada, es finita en longitud. Tal línea puede ser visualizada como un camino cerrado, tal como una circunferencia o una elipse, que no se intersecta a sí misma. Adoptando este punto de vista, los matemáticos en breve descubrieron no uno, sino dos sistemas geométricos consistentes en los que la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri se sostiene. Cuando se recuerda que en las geometrías euclidiana e hiperbólica la existencia de las paralelas se establece con el auxilio del supuesto de la infinitud de la recta, no sorprende que no haya paralelas en las dos nuevas geometrías elípticas (Gans, 1955; algunas comas son mías).

1 Proposición XIII: "en la HAR y en la HAO el postulado V de Euclides es verdadero".

En el texto que acabamos de leer se mencionan “dos sistemas geométricos...”. Son los que llamaremos geometrías elípticas “doble” y “simple”, respectivamente. Una diferencia básica es que, en la primera, las rectas se encuentran siempre en *dos* puntos, mientras que en la segunda lo hacen en *uno*.

Geometría elíptica doble

Dentro de varias posibilidades, veamos unos axiomas para introducirnos en la geometría elíptica doble o de Riemann, de tipo esférico[2]. La superficie esférica sirve muy bien para modelizar estos axiomas.

La recta elíptica

Axioma 1 – La recta es una línea cerrada de longitud finita y que no se corta a sí misma.

Nótese que en una recta así no se verifican los axiomas de orden lineal euclidianos. En efecto, dados tres puntos sobre la recta *cada uno de ellos yace entre los otros dos*, como fácilmente puede comprobarse marcando tres puntos sobre una línea cerrada (cap. 6, Fig. 29).

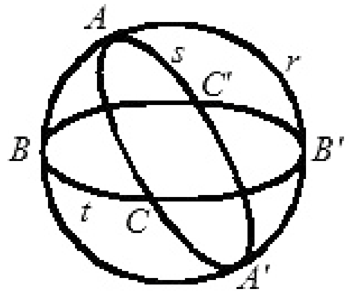
Axioma 2 – Cada par de rectas se corta en exactamente dos puntos.

En la superficie esférica podemos identificar las rectas con las circunferencias máximas. La Fig. 169 nos muestra las rectas r, s, t, y sus puntos de intersección cada dos de ellas. Por ejemplo, r y s se encuentran en A y A'.

La recta, aunque finita, es ilimitada en cuanto que, moviéndonos sobre ella, nunca llegamos a un borde, extremo o término.

Si en la superficie queremos unir dos puntos con una línea (no dijimos “recta”), existen infinitas posibilidades de elección para curvas que unan esos puntos. Aceptemos el

Axioma 3 – Entre las curvas trazadas entre dos puntos del plano existe una de longitud mínima.



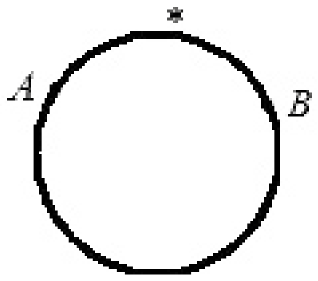
(Fig. 169)

2 Seguiremos a Gans (1955) y Bonola (1921: cap. XII).

Una línea con esa propiedad se denomina *geodésica* de ese plano. En el plano de la geometría euclidiana, donde se ha definido la distancia habitual, la geodésica es la línea recta; es decir, que la mínima distancia entre dos puntos es la longitud del segmento de recta que los une. En la superficie esférica la geodésica es la circunferencia máxima y la mínima distancia entre dos puntos es la longitud del arco de circunferencia máxima que los conecta.

La línea dada por el Axioma 3 se llamará *segmento* y su longitud será la *distancia* entre los puntos.

Del Axioma 1 se deriva que dos puntos *A* y *B* de una recta la dividen en dos partes. Una de esas partes será, entonces, un segmento. En la Fig. 170 el segmento $\overline{AB}$ está indicado con un asterisco.



(Fig. 170)

Axioma 4 – De las dos partes en que dos puntos dividen a una recta, al menos una de ellas es un segmento.

Si las dos partes son congruentes, ambas son segmentos, y si no lo son, la menor es el segmento; de este diremos que es *único*[3].

En la Fig. 169 tenemos, por ejemplo, los dos segmentos congruentes determinados por *B* y *B'* sobre *r*. Si dos puntos dividen una recta en segmentos congruentes, se dicen *antipodales*; cada uno es antipodal del otro.

Axioma 5 – Un segmento cualquiera que une dos puntos está contenido en alguna recta que pasa por ellos.

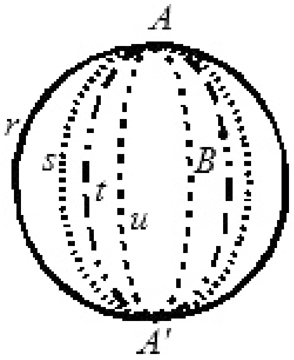
Por lo tanto, dados dos puntos del plano, hay una recta que pasa por ellos, que es única siempre que determinen un segmento único:

Axioma 6 – Una recta que pasa por dos puntos es única si y solo si estos no son antipodales.

Además, existe un segmento único que une dos puntos si hay una recta única que los contiene. En la Fig. 171 vemos los puntos antipodales *A* y *A'* y por ellos varias rectas *r*, *s*, *t*, *u*, trazadas con diferentes tipos de línea, que los contienen[4]. En cambio por *A* y *B* pasa solo una recta, la *t*.

3 En otros textos se dice que los dos puntos dividen a la recta en dos segmentos adyacentes. Véase por ejemplo Bonola (1921: 356).

4 Téngase en cuenta que cada recta es una circunferencia máxima, no una elipse como puede sugerir la figura.



(Fig. 171)

Tenemos ya mismo un teorema: si dos puntos son antipodales en una recta, lo son en cualquier otra.

Demostración: supongamos que *A* y *A'*, antipodales en *r* (Fig. 171), *no* fueran antipodales en otra recta *w*, no trazada allí. Por Axioma 6, esa recta *w* sería la única por *A* y *A'* lo cual contradice que ellos también están en *r*.

Ahora podemos deducir algo realmente interesante. Sean dos rectas cualesquiera *r* y *s*. Sigamos esta argumentación:

a) *r* y *s* se cortan mutuamente en dos puntos, digamos *A* y *A'* por Axioma 2;

b) esos puntos determinan sobre ellas al menos un segmento por Axioma 4;

c) al haber dos rectas por *A* y *A'* ellos necesariamente son antipodales por Axioma 6;

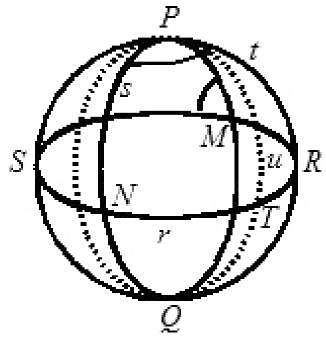
d) entonces no determinan un solo segmento sobre las rectas sino dos, que son *congruentes*.

Conclusión: ¡todas las rectas se bisecan entre sí y poseen igual longitud! Luego, si damos a cada segmento en que ellas se dividen una longitud unitaria, resulta que la máxima longitud posible de un segmento es 1, cuando sus extremos son puntos antipodales, y la longitud de toda la recta es 2.

Una recta basta para dividir el plano elíptico en dos regiones. Para ir de un punto a otro de cada región necesariamente se debe atravesar la recta.

Perpendiculares

Veremos a continuación que toda recta perpendicular a otra pasa por un mismo par de puntos antipodales, y es dividida por dichos puntos y esta recta en cuatro segmentos congruentes. Los puntos de intersección entre las rectas están a distancia ½ de los puntos antipodales.



(Fig. 172)

Demostración: recordemos que todas las rectas se bisecan entre sí. Sea una recta *r* y *M* un punto de ella (Fig. 172). Por *M* trazamos la recta $s \perp r$ (los ángulos marcados con arcos son rectos). Ambas rectas también se encuentran en *N*, antipodal de *M*. Sea *P* el punto medio de uno de los dos segmentos $\overline{MN}$ que quedaron determinados sobre *s*. Sea *t* la recta perpendicular a *s* por *P*, que corta a *r* en dos puntos *R* y *S* y a *s* en otro punto Q, antipodal de *P*[5].

Dado que *r* biseca a *t*, se tiene que

$\overline{RQ} + \overline{QS} = \overline{SP} + \overline{PR} = 1$,[6]

y como *s* biseca a *t*, se tiene que

$\overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{QS} + \overline{SP} = 1$.

De estas últimas igualdades se deduce que $\overline{PR} = \overline{RQ} = \overline{QS} = \overline{SP} = {}^1/_2$ y, por lo tanto, esos cuatro segmentos son únicos. Y como *s* y *t* bisecan a *r* también son únicos y miden ½ los segmentos $\overline{MR} = \overline{NR} = \overline{MS} = \overline{NS}$.

Los triángulos *MPR* y *NPR* son congruentes por criterio LAL ya que sus ángulos en *P* son rectos, $\overline{MP} = \overline{NP}$ y $\overline{PR} = \overline{PR}$. Luego $\angle MRP = \angle NRP$ y por ser adyacentes ambos son rectos[7].

Si razonamos sobre los triángulos *MPS* y *NPS* resultan congruentes y se tiene que $\angle MSP = \angle NSP =$ 1R. En pocas palabras: *s* y *t* pasan por *P* y Q y son perpendiculares a *r* en puntos ubicados a media unidad de *P* y Q.

Para *cualquier* otra recta por *P* (y Q), como *u* (con línea punteada), puede probarse que *r* y *s* la dividen en cuatro segmentos únicos congruentes, de longitud ½. Si *u* corta a *r* en *T*, los triángulos *PRT* y *QRT* son congruentes por LAL. Esto implica que $\angle PTR = \angle QTR =$ 1R y por lo tanto $u \perp r$.

5 *R* y S no pueden coincidir con *M* y *N* pues de ser así *s* y *t* se superpondrían.

6 En rigor el símbolo no es correcto porque una suma de segmentos no es un número; las que se suman son las longitudes de esos segmentos.

7 Nótese que estos triángulos son simétricos. Dos figuras son congruentes si existe una isometría (función biyectiva que preserva las distancias) que transforma una en la otra. Luego nuestros triángulos son congruentes pues puede transformarse uno en el otro mediante la reflexión (o simetría axial), que es una isometría. Véase cap. 14, pág. 252.

Supongamos que por otro punto de *r* (digamos *K*, *no* puesto en la Figura 172) se traza una recta $l \perp r$. Al no ser *K* y *P* antipodales la recta *KP* es única y, por lo dicho en el párrafo anterior, *l* y *KP* son la misma recta.

También se prueba que el lugar geométrico de los puntos situados a media unidad de un punto *P* es una recta perpendicular a cada recta por *P*.

Geometría elíptica simple

Esta geometría, también denominada de Riemann de tipo elíptico, tiene en común con la doble los axiomas 1, 3, 4 y 5, y reemplaza el 2 por otro postulado. Para modelizarla sirve la superficie esférica, aunque hay que introducirle adaptaciones.

La recta elíptica

Axioma 1 – La recta es una línea cerrada de longitud finita y que no se corta a sí misma.

Axioma 2 – Cada par de rectas se corta en exactamente un punto.

El plano elíptico en este caso contiene rectas *cerradas* que se cortan en *un* punto, lo que es sorprendente para nuestra intuición, pues cuesta imaginar algo así.

Axioma 3 – Entre las curvas trazadas entre dos puntos del plano existe una de longitud mínima.

Axioma 4 – De las dos partes en que dos puntos dividen a una recta, al menos una de ellas es un segmento (en el sentido visto en la geometría elíptica doble).

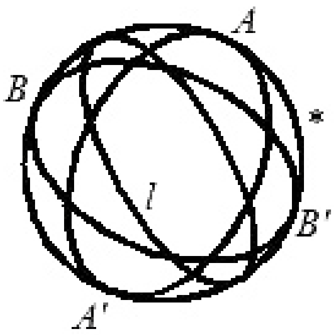
Si las dos partes son congruentes, ambas son segmentos, y si no lo son, la menor es el segmento; de este diremos que es *único*.

Axioma 5 – Un segmento cualquiera que une dos puntos está contenido en alguna recta que pasa por ellos.

Un raro recurso que nos permite disfrutar del modelo que brinda la superficie esférica (como lo hace, con fruición, un buen matemático moderno), es considerar a cada par de puntos antipodales como un *único* punto. Así, exactamente *una* recta pasa por cada dos puntos. En la Fig. 171 *A* y *A'* son, con esta interpretación, un único punto, que denotamos $\overline{A} = \{A, A'\}$.

Esta adaptación trae como consecuencia que la longitud de la recta se reduce a la mitad. La distancia entre dos puntos, digamos, $\overline{A} = \{A, A'\}$ y $\overline{B} = \{B, B'\}$, es la longitud del segmento único que une *A* (o *A'*) con *B* (o *B'*), y esta puede ser menor que la longitud del arco más corto que une *A* con *B*[8].

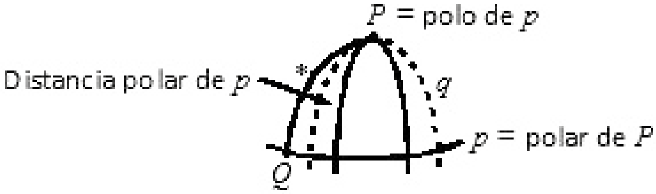
8 (Moise, 1974: Cap. 9). Por dudas en la interpretación de “punto” véase cap. 5, pág. 77.



(Fig. 173) Los puntos {*A, A'*} y {*B, B'*}.

Finalmente, ninguna recta separa al plano ya que, si se tiene una recta *l* y dos puntos exteriores {*A, A'*} y {*B, B'*}, siempre se podrá trazar un segmento que una {*A, A'*} con {*B, B'*} sin cortar a *l*, tal como se muestra en la Fig. 173, donde el segmento-arco (*AB'* se marcó con un asterisco[9]. Para separar el plano elíptico se necesitan *dos* rectas.

Perpendiculares, polos y polares



(Fig. 174)

Ahora volvemos a la denominación sencilla de los puntos. Se prueba, de forma similar a lo visto en la geometría elíptica doble, que las perpendiculares a una recta *p* pasan por un mismo punto *P* y tienen la misma longitud (Fig. 174). Esa longitud es denominada *distancia polar* de la recta *p*; al punto *P* se lo llama el *polo* de *p* y a la recta *p*, la *polar* de *P*.

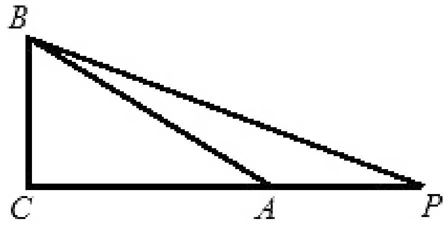
Si una recta *q* (con línea punteada), cuyo polo es *Q*, pasa por el polo de *p*, entonces *Q* pertenece a *p*. Esto es así porque la perpendicular a *q* trazada por *P* (señalada con *) corta a *p* en *Q*, y este es el polo de *q* pues en él se encuentran dos perpendiculares a *q*.

Suma de ángulos de polígonos

Dado que las rectas son finitas, las figuras no pueden tener extensión arbitraria. La *semirrecta* juega un papel particular en lo que sigue. Nótese que no se dijo "una" semirrecta, puesto que al ser todas las rectas de igual longitud, aquel término puesto en *cursiva* indica, literalmente, media recta. Luego todas las semirrectas son idénticas en longitud, una suerte de unidad de medida.

En un triángulo rectángulo, el ángulo opuesto a un cateto es agudo, recto u obtuso, según que ese cateto sea menor, igual o mayor que la semirrecta.

9 Cumple el mismo objetivo el arco-segmento *A'B* congruente con el *AB'*.



(Fig. 175)

Demostración: (Fig. 175). Sean el triángulo *BCA* rectángulo en *C* y *P* el polo de *AC*. Esto último implica que$\angle CBP$ = 1R y que $\overline{CP}$ es congruente con la semirrecta. Unimos *B* con *P*. Consideramos el cateto $\overline{CA}$ y el$\angle CBA$ opuesto a él.

La posición de *A* puede darse dentro de tres posibilidades:

a) *C-A-P* (como en la figura), en este caso $\overline{CA} < \overline{CP}$;

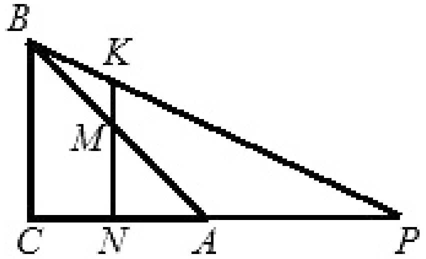
b) *A* coincidente con *P*, es decir $\overline{CA} = \overline{CP}$; o

c) *A* situado en la prolongación de $\overline{CP}$, y $\overline{CA} > \overline{CP}$.

En el caso b) se tiene$\angle CBA$ =$\angle CBP$ = 1R. Luego, para la situación a) es$\angle CBA$ *agudo* y para c), $\angle CBA$ *obtuso.*

El recíproco también es cierto, pero se omite la prueba.

Veremos en seguida que la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 2R.



(Fig. 176)

Demostración: comencemos con triángulos rectángulos. Obviamente, para los casos b) y c) recientemente vistos, el teorema es cierto. Resta analizar el caso en que los dos catetos son menores que una semirrecta. Sea el *BCA* rectángulo en *C* (Fig. 176). Se traza el punto medio *M* de la hipotenusa $\overline{AB}$ y por él se dibuja la perpendicular *MN* a *CA*. Sean *P* el polo de *MN* y *K* el punto de intersección entre *PB* y *MN*. Nótese que el$\angle MKP$ es recto (aunque usted no lo vea..., esto es porque *P* es polo de *MN*).

Los triángulos *MNA* y *MKB* son congruentes por ser rectángulos y ser, además, $\angle NMA$ =$\angle KMB$ y $\overline{AM} = \overline{MB}$ (Euclides I.26, ¡qué increíble usar esto aquí!). De esto surge que

$\angle MAN$ =$\angle MBK$. (1)

Sumando a cada miembro de (1) el $\angle ABC$, queda

$\angle$ABC + $\angle$MAN = $\angle$PBC,

o sea

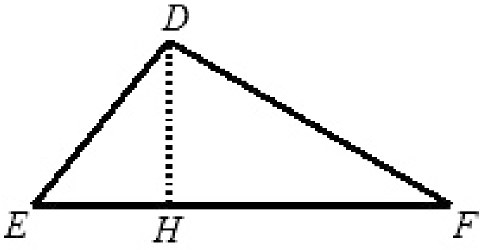
$\angle$ABC + $\angle$BAC = $\angle$PBC. (2)

En el triángulo rectángulo *BCP* se tiene que $\overline{PC} = \overline{PN} + \overline{NC}$ es *mayor* que una semirrecta[10], razón por la cual $\angle PBC$ > 1R. Luego, de (2) surge que

$\angle ABC + \angle BAC$ > 1R,

y en el triángulo *BCA* queda probado que S_i > 2R.

Ahora se completa la demostración para un triángulo cualquiera, como el *DEF* de la Fig. 177. Si tiene dos ángulos rectos u obtusos el teorema queda probado. Supongamos, entonces, que tiene dos ángulos agudos en *E* y *F*.



(Fig. 177)

Sea *DH* la perpendicular a *EF* por *D*. En el triángulo *DHE* se tiene: $\angle DEH + \angle EDH$ > 1R (3), y en el *DHF*: $\angle DFH + \angle HDF$ > 1R (4).

Sumando miembro a miembro (3) y (4) resulta que la S_i del *DEF* supera a 2R.

El teorema demostrado nos indica que en esta geometría... ¡falla Euclides I.17! También nos lleva a otras cosas, como que en un polígono de *n* lados es S_i > 2R(*n* – 2) y S_e < 4R, y que en un cuadrilátero trirrectángulo el cuarto ángulo es obtuso.

Se define el *exceso angular* como

$\varepsilon = S_i - 2R(n - 2)$.

El exceso posee propiedades análogas a las del *defecto* de la geometría hiperbólica (véase cap. 10 pág. 184) y se lo toma (o a un número proporcional a él) como área de los polígonos.

Concluimos aquí esta brevísima incursión por la geometría sin paralelas.

10 Note que $\overline{PN}$ es, justamente, una semirrecta, por ser *P* polo de *MN*.

El porqué de unas denominaciones

En la nota 15 del cap. 5 y en el cap. 9 dijimos que la geometría euclidiana se denomina también *parabólica*. Encontramos la razón de ser de esto en la geometría proyectiva: la parábola, en este campo, es una cónica con *un* punto en el infinito, tal como la recta euclidiana. Por analogía, como la hipérbola tiene *dos* puntos en el infinito (como la recta hiperbólica) y la elipse *ninguno* (como la recta elíptica), reciben los nombres de *hiperbólica* y *elíptica* nuestras geometrías no euclidianas.

No obstante, en el plano proyectivo todas las cónicas son equivalentes. ¡He aquí otro territorio inmenso para explorar!

[Capítulo 13]

Geometrías no euclidianas e interrogantes

> Las obras de Lobachevski y Bolyai no tuvieron, en un principio, aquella acogida que tantos siglos de lenta y continua preparación parecían prometer. Esto, sin embargo, no debe maravillarnos, porque la historia de la ciencia nos enseña que toda mudanza radical en cada disciplina no borra con un rasgo las convicciones y prejuicios sobre los cuales los estudiosos y los pensadores edificaron, a través de un largo período, sus doctrinas (Bonola, 1921: 282).

Impacto inicial

Así como nos surgió un sentimiento de extrañeza ante los teoremas de las geometrías no euclidianas, por reñirse con nuestra intuición y experiencia, sucedió lo mismo a los matemáticos cuando esas geometrías salieron a escena a mediados del S. XIX. Era natural que así fuera, dado que se consideraba que la realidad se ajustaba a la inmemorial geometría de Euclides. El mismo Gauss, que había descubierto por su cuenta la geometría hiperbólica, prefirió no publicar nada por no considerar maduros los tiempos para recibirla.

> Puede tomar mucho tiempo antes de que haga públicas mis investigaciones al respecto. De hecho, puede que no ocurra mientras sigo vivo, ya que temo el clamor de los beocios si llegase a expresar mis puntos de vista completamente[1].

La geometría hiperbólica fue la primera en surgir y, aunque fue anticipada por Saccheri, apenas fue visible en su momento. Tampoco se visibilizó por Gauss, quien no la publicó, como se dijo. Las primeras exposiciones públicas de esta nueva geometría se debieron a Lobachevski y János Bolyai en sendas obras: *Geometría imaginaria* o *Pangeometría* y *Ciencia absoluta del espacio*[2]. Sin embargo, la difusión de estos trabajos se vio afectada por estar escritos en idiomas no muy populares en el ámbito científico: ruso y húngaro. Lo mismo que por sus autores, no muy conocidos, y por un ingrediente cultural impensado: la filosofía kantiana, en un sentido que luego intentaré aclarar[3].

Las geometrías no euclidianas plantearon interrogantes profundos en la matemática y en áreas del conocimiento fuera de ella, como la física y la filosofía. Algunas cuestiones han sido resueltas. Otras son apasionantes "puertas" que nos invitan a abrirlas y a acceder a su través hacia áreas poco exploradas o aún sin respuestas definitivas.

1 Fragmento de una carta de Gauss a Friedrich Bessel (1784-1846), citado en Falk (1995) y tomado a su vez de Morris Kline: *Mathematics: The Loss of Certainty* y David Burton: *The History of Mathematics.*

2 El tratado de Bolyai constituyó un apéndice (de largo título) a una obra de su padre; tal apéndice resultó ser a la larga más importante que la obra paterna. Véase cap. 10, pág. 175.

3 Immanuel Kant (1724-1804) fue un filósofo alemán de enorme influencia. Su complejo pensamiento, particularmente en teoría del conocimiento, aún hoy hace sentir sus efectos.

Interrogantes en la matemática

La geometría euclidiana tuvo que dejar su lugar de única protagonista, para compartir espacio con las geometrías hiperbólica y elíptica, las que quedaron afincadas firmemente, dada su probada consistencia. Resultado de esta tripartición fue la aparición, en la ciencia matemática, de teoremas mutuamente excluyentes. Consideremos, por ejemplo, estos tres:

I-La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.

II-La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que dos rectos.

III-La suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que dos rectos.

¿Cómo puede ser que los tres teoremas coexistan dentro de la matemática, siendo todos ellos obtenidos legítimamente de deducciones correctas? ¿Cuál de todos es el verdadero? Una pregunta como la última tiene un matiz metafísico, que era hasta inconscientemente supuesto en los albores de las nuevas geometrías.

Este asunto afortunadamente fue solucionado con rapidez, cuando se estableció con claridad que los enunciados matemáticos no tienen significado ontológico. La respuesta al interrogante es que los teoremas I, II y III, son ciertos dentro de algún desarrollo deductivo que parte de ciertos axiomas. Por ejemplo II es “verdadero” (o sea que puede deducirse de los axiomas) en la geometría hiperbólica y es “falso” en las otras dos (véase cap. 5, pág. 92).

Un hallazgo vino a reforzar la idea de igualdad de valor de las tres geometrías: sus consistencias están ligadas. Veamos un ejemplo simple que nos ilustrará sobre esto (Guasco et al.,1996: 156 y ss.):

Se establece primeramente una interpretación, traducción o “diccionario”, de entes geométricos que se expone en la siguiente correspondencia:

Plano → Superficie esférica.

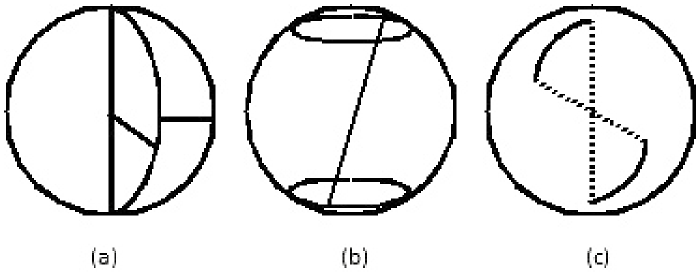
Punto → Par de puntos antipodales de la superficie esférica.

Recta → Circunferencia máxima.

Ángulo → Diedro (Fig. 178 a).

Circunferencia → Par de circunferencias con puntos mutuamente antipodales (Fig. 178 b).

Segmento → Par de arcos antipodales (Fig. 178 c). Estos arcos, por la interpretación dada de recta, son arcos de una circunferencia máxima.



(Fig. 178)

Ahora aceptamos el sistema de axiomas $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ siendo:

A_1–Dos puntos distintos determinan una única recta a la que pertenecen.

A_2–Los ángulos rectos son congruentes.

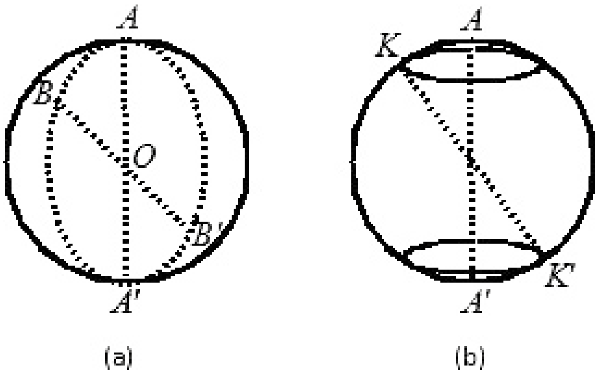
A_3–Dados un punto y un segmento, se puede trazar una circunferencia con centro en el punto y radio congruente con el segmento.

A_4–Dos rectas se cortan siempre en un punto.

Puede apreciarse que los tres axiomas primeros coinciden con postulados de Euclides (véase cap. 4, pág. 62), mientras que el cuarto equivale al de Riemann; esto manifiesta que nuestro sistema corresponde a una geometría *no euclidiana.*

La traducción del Axioma 1 con la correspondencia establecida es: *dos pares distintos de puntos antipodales determinan una única circunferencia máxima a la que pertenecen*, enunciado que es un teorema de geometría euclidiana y que denotaremos T_1. La prueba euclidiana es la que sigue:

Demostración: sean *A* y *A'*, *B* y *B'*, los pares de puntos antipodales (Fig. 179 a). Luego, las rectas *AA'* y *BB'* se cortan en el centro de la esfera y por ellas pasa un único plano, el cual intersecta a la superficie esférica en una circunferencia máxima única.



(Fig. 179)

El Axioma 2, traducido, es: *los diedros rectos son iguales*. Esta afirmación también se demuestra en la geometría euclidiana y la llamaremos T_2.

Al traducir el Axioma 3 nos da el enunciado (engorroso) de otro teorema euclidiano, T_3 (Fig. 179 b): dados dos puntos antipodales (*K, K'*), extremos respectivos de un par de arcos antipodales [(*KA*, (*K'A'*], se pueden trazar dos circunferencias con puntos mutuamente antipodales tales que sus puntos equidistan de los otros extremos de los arcos (*A, A'*).

Finalmente, el Axioma 4 convertido con el diccionario queda: *dos circunferencias máximas se cortan siempre en un par de puntos antipodales*, teorema euclidiano también, por nosotros denotado T_4.

Supongamos ahora que

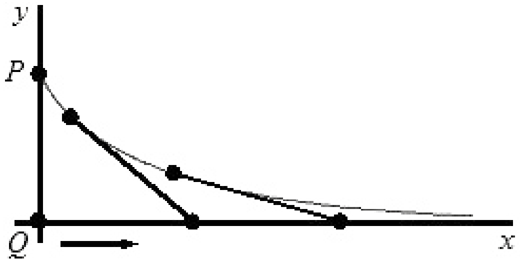
$\{A_1, A_2, A_3, A_4\} \Rightarrow T$,

donde T es un teorema surgido de esos axiomas. Aplicando el diccionario a esto nos queda

$\{T_1, T_2, T_3, T_4\} \Rightarrow T'$,

siendo T' un teorema de la geometría euclidiana. El sistema $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ es una geometría euclidiana, donde los enunciados T_1 a T_4 trabajan de axiomas[4]. Esta situación especular entre ambos sistemas axiomáticos tiene la importante consecuencia de que *si fuera inconsistente la geometría no euclidiana que surge del primer sistema, también lo sería la euclidiana del segundo sistema.* Las consistencias de ambas geometrías están casadas.

La pseudoesfera



(Fig. 180) Generación de la tractriz.

Considérese un objeto *P* en el eje *y* (Fig. 180) unido a un objeto *Q* con una varilla rígida $\overline{PQ}$. Si *Q* se desliza hacia la derecha sobre el eje *x*, ¿qué trayectoria sigue el objeto *P*? La respuesta, conocida desde el siglo XVII, es que *P* describe una curva: la *tractriz*, también llamada *equitangencial*, porque los segmentos de tangente a ella, desde el punto de tangencia hasta la asíntota (en este caso el eje *x*), son de igual longitud, la de $\overline{PQ}$.

En la Fig. 180 solo se muestra la mitad de una tractriz. Si se considera el movimiento de *Q* hacia la izquierda sobre el semieje negativo *x*, se obtiene la parte faltante, simétrica de la que muestra la figura.

4 Esta es una situación simplificada de la cual interesan, más que nada, las ideas. Obviamente los axiomas T_1 a T_4 son insuficientes para fundamentar la geometría euclidiana.

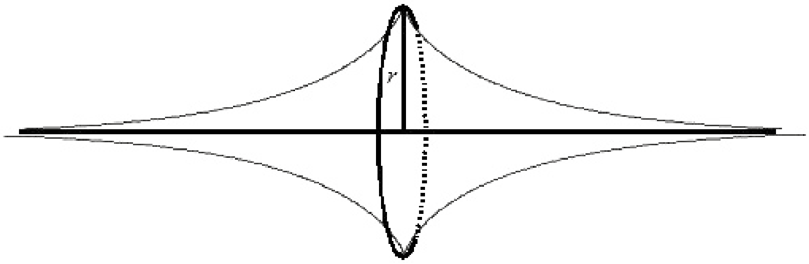
Un nombre curioso y doméstico de la tractriz es "curva del perro", que proviene de suponer que hay un perro en *P* (*Pichi*) y un apetitoso hueso cerca de su alcance (pero no lo alcanza, pues si lo hiciera toda esta explicación no tendría sentido). *Q* (*Quasimodo*) es el dueño del can y decide alejarse, caminando por el eje *x*, arrastrando al animal con una cuerda de longitud fija. El perro, atraído por el óseo manjar, mantiene la cuerda tirante todo el tiempo en su afán de conseguirlo, y describe, por lo tanto, una tractriz. Estamos ante un aporte perruno a la geometría. Bien se merece que le den el hueso[5].

La ecuación cartesiana de la tractriz es

$$x = a.\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right)-\sqrt{a^2-y^2}$$

donde *a* es la longitud del segmento fijo (o de la varilla rígida, o de la cuerda de *Pichi*). Si usted quiere graficarla, asígnele valores a y, con $0 < y \leq a$.

Tomemos ahora una tractriz y hagámosla girar en torno a su asíntota. Se genera así una superficie de revolución, la *pseudoesfera*, o "falsa esfera"[6]. En la Fig. 181 se representa una pseudoesfera de radio *r*.



(Fig. 181) La pseudoesfera.

Esta superficie posee algunas características similares a la de la superficie esférica, de allí su nombre: tiene la misma superficie finita, $4\pi r^2$, y encierra un volumen finito igual a la mitad del volumen de la superficie esférica: $^2/_3\,\pi r^3$.

Si bien el concepto de curvatura, propio de la geometría diferencial, escapa a nuestros objetivos menciono para quien desee profundizar que la pseudoesfera tiene curvatura constante *negativa* y, en porciones acotadas, resulta válida sobre ella la geometría hiperbólica[7]. Se dice que en ella es "localmente válida" la geometría hiperbólica. En lo que refiere a validez de geometrías, de forma análoga sucede con la superficie esférica: tiene curvatura constante *positiva* y es localmente válida para la geometría elíptica. El plano, por último, tiene curvatura *nula* y vale sobre él la geometría euclidiana.

5 La tractriz es un ejemplo de las llamadas curvas "de persecución" y también de las curvas "mecánicas".

6 El prefijo griego *pseudo* significa "falso".

7 Otro ejemplo de superficie con curvatura negativa, frecuentemente presentada en las explicaciones, es el paraboloide hiperbólico (o "silla de montar").

Interrogantes en la física y la filosofía

> Su descubrimiento ponía en verdaderos apuros: ¿qué hacer con estas nuevas geometrías? ¿Cuál sería su efecto respecto de la vieja y tradicional? Puesto que no se trataba de geometrías contradictorias, ¿cuál resultaba la verdadera? Los hombres habían aceptado siempre gratuitamente que vivían en un universo euclídeo. ¿Seguía esto siendo válido? (Hausmann, 1968: 56).

Una era la geometría y ella era la que representaba el espacio físico. Mas, al aparecer las extrañas hermanas no euclidianas, la cuestión surgió naturalmente: ¿qué geometría corresponde al espacio donde nos movemos? Este interrogante pertenece tanto a la física como a la filosofía; la primera busca que sus leyes estén correctamente enmarcadas, y una descripción matemática del espacio de los fenómenos es necesaria; la segunda procura el conocimiento más completo de la naturaleza, por el conocimiento mismo y distintamente que la ciencia (véase cap. 2, pág. 39).

Geometría y física

> Cuando el mundo físico es visto al modo euclidiano, una superficie plana como la de un pizarrón, una mesa, o una piscina, es concebida como una pequeña y algo imperfecta porción de una superficie plana ideal de extensión infinita. Por lo tanto, aunque las trayectorias rectas en esas superficies físicas, por ejemplo, trazos con regla en un pizarrón, son necesariamente finitas en extensión, las imaginamos como partes de trayectorias rectas infinitas, y que por ello cumplen las proposiciones de la geometría de Euclides. Cuando las cosas se ven a la manera hiperbólica, sin embargo, el mismo pizarrón puede ser concebido, con igual corrección, como una diminuta parte de una enorme pseudoesfera, y los mismos trazados se ajustan a la geometría hiperbólica, por lo que dentro de regiones limitadas ambos sistemas son igualmente válidos.
>
> Pero estos dos sistemas no agotan las maneras en que podemos ver el mundo físico. Nuestro pizarrón puede imaginarse como una parte pequeña de muchas otras superficies, y sus trazados como tema de varias geometrías de las trayectorias mínimas en esas superficies. Entre superficies tales, las esferas son las más simples; sobre ellas los caminos mínimos son curvas cerradas de gran extensión. Asociadas con esas superficies, entonces, hay geometrías, incluyendo las de tipo elíptico, en las que la recta es ilimitada aunque finita, en acuerdo con las ideas de Riemann. Así, en adición a los modos euclidiano e hiperbólico de racionalización del pizarrón y sus reglas (o cualquier superficie física plana y sus trayectorias rectas) tenemos también el riemanniano. De hecho, el último tiene más sentido que los otros dos si el universo es de extensión limitada y no suficientemente "espacioso" para sus líneas rectas (Gans, 1955).

Esto nos está diciendo que nuestra percepción no es suficiente para descubrir la geometría del mundo físico, pues si bien los ingenieros al diseñar edificios y puentes utilizan la geometría euclidiana, son las pequeñas dimensiones en las que nos movemos las que provocan la aplicabilidad de los *Elementos* de Euclides a nuestros problemas cotidianos. De hecho, si lo pensamos bien, vivimos sobre una enorme esfera[8] cuyo radio mide, aproximadamente, 6370 km. Nuestra percepción diaria es que vivimos sobre un plano.

8 Sabido es que la forma real de la Tierra no es esférica, aunque se le aproxima.

Un aspecto interesante del asunto es el que tiene relación con el parámetro k que aparece en las fórmulas de geometría hiperbólica (véase cap. 10 pp. 194 y 198). En un terreno experimental, Lobachevski aplicó la nueva trigonometría hiperbólica a un inmenso y real triángulo rectángulo *ABC*, con el cateto $\overline{BC} = a$ = diámetro de la órbita terrestre en torno al Sol[9] y el vértice *A* en una estrella fija en dirección perpendicular a $\overline{BC}$. De sus cálculos, aplicados a la paralaje de la estrella Sirio[10] y que aquí no incluiré, obtuvo que la relación entre a y k es

$$\frac{a}{k} < 0{,}000006012.$$

Si bien esto no le permitió calcular k, sí le aseguró que k es enorme comparado con a, diámetro de la órbita terrestre. Para paralajes medidos más pequeños (lo que implica que las estrellas son aún más lejanas) k sería aún mayor.

> Para que en el espacio físico fuese válida la Geometría euclídea, y por consiguiente el postulado V, debería ser k infinito, o lo que es lo mismo, deberían existir estrellas con paralajes tan pequeñas como se quiera.
>
> Ahora, una respuesta a la última cuestión [la existencia de esas estrellas] se comprende que no podremos darla nunca, puesto que las observaciones astronómicas serán siempre limitadas. Sea como quiera, dada la enorme magnitud de k respecto a las líneas directamente medibles, deberemos, con Lobachevski, suponer válida en el campo experimental la hipótesis euclídea (Bonola, 1945: 100)[11].

En torno a este problema, una temprana ocurrencia empírica es medir y sumar los ángulos de un triángulo físico, es decir, determinado por objetos reales, y cotejar el resultado obtenido con 2R para ver si es mayor, igual o menor que esa cantidad, y decidir así cuál de las tres geometrías "se cumple". Pero el tamaño es determinante:

> Las observaciones astronómicas indican que la deficiencia de un triángulo, con lados casi iguales a la distancia de la Tierra al Sol, no puede ser superior a 0,00003''. Ahora, si en lugar de un triángulo astronómico considerásemos un triángulo terrestre, con los ángulos accesibles a las medidas directas, en virtud del principio de proporcionalidad entre el área y la deficiencia, la eventual deficiencia de tal triángulo entraría necesariamente en los límites de los errores experimentales; así que, experimentalmente, podremos suponer que la deficiencia en cuestión sea nula, y, por consiguiente, sea válido en el campo experimental el postulado euclídeo (Bonola, 1945: 101).

9 a mide unos 300.000.000 km.

10 Sirio es una estrella situada a unos 8,6 años luz de la Tierra. Por lo tanto, el cateto $\overline{AB}$ del triángulo *ABC* considerado mide unos $8{,}6 \times 9{,}5 \times 10^{12}$ km. ¡Termine usted el cálculo! *Paralaje:* "Diferencia entre las posiciones aparentes que en la bóveda celeste tiene un astro, según el punto desde donde se supone observado" (DLE). Cuanto más lejano está el objeto, menor es su paralaje. Los astrónomos expresan las paralajes en unidades angulares. Apreciamos paralajes cuando viajamos por una ruta en auto. Los objetos más lejanos parecen moverse más lentamente (menor paralaje) en relación al fondo de la escena, que los más cercanos (mayor paralaje).

11 Teniendo en cuenta que la obra de Bonola es ya una antigüedad, no me atrevo a afirmar que el dato numérico que he presentado para *a/k* aún sea válido. Sin embargo la prioridad no es el dato exacto; la esencia de los razonamientos se mantiene y las paralajes de las estrellas siguen siendo pequeñísimas, obviamente.

Por lo tanto, el triángulo a utilizar en un experimento físico debe ser de tamaño enorme, incluso de dimensiones astronómicas *importantes*. Y se añade aquí el "detalle" no menor de los errores inherentes a todo proceso de medición, los cuales *no pueden eliminarse.* Así que estamos ante esta situación:

- Si la suma de ángulos del triángulo fuera menor o mayor que 2R, y esa diferencia no fuera atribuible a los errores de medición, quedaría probado que la geometría del espacio es hiperbólica o elíptica, respectivamente. Esto pasaría, por ejemplo, si el máximo error posible de medición por cada ángulo fuera 0,001" (y, por los tres, 0,003") y la suma S_i diera, digamos, 179° 59' 59,99". La diferencia con 2R, 0,01", es mucho mayor que 0,003", y aquí la geometría sería hiperbólica (Moise, 1974: 166).

- Como la suma de ángulos del triángulo es *exactamente* 2R en la geometría euclidiana, angustiosamente tenemos que admitir que, de ser esta la geometría del mundo físico, *nunca lo podremos saber experimentalmente*. En efecto, el error de medición nunca será cero y, por ende, nunca la medición dará precisamente 2R. ¿Qué tal?

Si en el futuro los avances de la tecnología hacen posible una mayor precisión en las mediciones angulares, a lo sumo podremos descubrir si la geometría del mundo físico es hiperbólica o elíptica.

Otra arista de esta discusión es la aplicación de la matemática a la física como factor de decisión de cuál geometría "vale" en el universo; podríamos decir que vale la euclidiana porque es la que funciona. Está demostrado que tanto la geometría hiperbólica como la elíptica, se aproximan a la euclidiana en entornos infinitesimales, de allí la validez habitual e instrumental de la geometría de Euclides.

Y debemos decir que ambas geometrías no euclidianas tienen aplicaciones en física, prestando un andamiaje matemático en la teoría de la relatividad de Einstein.

> Si la teoría de la relatividad según Einstein proporciona un panorama exacto del universo físico, entonces la geometría de este universo es no euclídea puesto que tal es la geometría esencial a aquella teoría (Hausmann, 1968: 58)[12].

¿O habrá en el universo regiones donde valga una u otra geometría, mientras en otras partes se verifiquen geometrías diferentes?

Geometría y filosofía

> (...) la mente kantiana es esclava de la geometría euclidiana (Falk, 1995: 104).

Es indudable que la geometría no euclidiana incidió sobre la filosofía de Kant. En efecto, en lo que respecta a su teoría del conocimiento[13], significó un duro golpe para la postura del filósofo.

Un conocimiento verdadero para Kant es aquel del cual puede afirmarse que es universal y necesario. En la Europa de la época de Kant había dos corrientes gnoseológicas principales:

---

12 Albert Einstein (1879-1955). Véase pág. 19 en las "Consideraciones preliminares" de este libro.

13 La teoría del conocimiento se denomina "gnoseología" (del griego *gnosis* = conocimiento, *logos* = tratado).

- el *empirismo*, según el cual todo conocimiento se genera a partir de la experiencia y no hay verdades necesarias sino solo verdades de hecho, y

- el *racionalismo*, para el cual el conocimiento procede del pensamiento autónomo.

Exponentes principales de la primera escuela fueron Hume y Locke; de la segunda, Leibniz y Wolff[14].

> Kant admite por lo pronto que todo conocimiento comienza con la experiencia. Pero indica a la vez que no todo él procede de la experiencia. Ello significa que la explicación genética del conocimiento, al modo de Hume, no es para Kant totalmente satisfactoria: resolver la cuestión del origen no es todavía resolver el problema de la validez; pues la experiencia no puede por sí sola otorgar necesidad y universalidad a las proposiciones de que se compone la ciencia y, en general, todo saber que aspire a ser riguroso. Es necesario preguntarse, pues, cómo es posible la experiencia, es decir, encontrar el fundamento de la posibilidad de toda experiencia (Ferrater Mora, 1994: 1989).

Si llamamos "juicios" a los enunciados que afirman o niegan algo sobre alguna cosa, es decir, que constan de un sujeto y un predicado, hay:

- *Juicios analíticos*, que son aquellos cuyo predicado está contenido en el sujeto. Esta característica les da certeza, pero son vacíos, porque "no producen nada nuevo"; ellos explican lo que ya se encontraba implicado en la misma noción del sujeto. Ejemplo: "el ser existe".

- *Juicios sintéticos*, en los que el predicado no está contenido en el sujeto. Por tanto no son vacíos, pero su certeza no está asegurada. Estos juicios añaden información sobre el sujeto. Ejemplo: "el agua hierve a 100 °C".

También los juicios pueden ser:

- *A priori*, o independientes de la experiencia; son universales y necesarios.

- *A posteriori*, o que se fundan en la experiencia (Ferrater Mora, 1994: 1990).

Los juicios analíticos son todos *a priori*; los sintéticos son *a posteriori*. Kant introduce otra clase de juicios, los sintéticos *a priori*, para poder explicar y fundamentar la legitimidad de los juicios de la matemática y de la física. Esto, como es de suponer no fue unánimemente aceptado. Por otra parte, no hay juicios analíticos *a posteriori*.

De la matemática dice Kant:

> Aquí hay una gran y establecida rama del conocimiento... (que) lleva consigo una certeza apodíctica, es decir, necesidad absoluta, que por ende no descansa sobre bases empíricas. En consecuencia es un producto puro del razonamiento y es, además, completamente sintética.

14 David Hume (1711-1776), John Locke (1632-1704), Gottfried Leibniz (1646-1716), Christian Wolff (1679-1754). En realidad, ambas corrientes filosóficas, con defensores, detractores, y variados matices, han existido a lo largo de la historia del pensamiento desde la Antigüedad hasta nuestros días.

> ¿Cómo es posible que la razón humana puede producir una cognición de esta naturaleza enteramente *a priori*?
>
> ¿No presupone esta facultad (que procede de la matemática), ya que ni es ni puede ser basada en la experiencia, algún fundamento de cognición *a priori*, que yace profundamente escondido, pero que podría revelarse en sus efectos, si sus primeros inicios se indagaran diligentemente? (Falk, 1995: 101).

Pues bien, este "fundamento de cognición" Kant lo coloca en ciertos elementos *a priori* o "formas puras de la sensibilidad": el *espacio* y el *tiempo*, que no proceden de la experiencia pero que la posibilitan. Leemos en Falk:

> Kant estuvo de acuerdo con que todo conocimiento comienza con la experiencia externa, ya que alguna sensación debe preceder e impulsar las operaciones del pensamiento; pero la mente puede actuar sobre las impresiones de los sentidos solamente porque ya está dotada con "intuiciones" de espacio y tiempo, que son independientes de la experiencia y dan forma a ella.

A partir de esta opinión resulta que los principios de la geometría del espacio euclidiano constituyen una necesidad inevitable del pensamiento. Lo que sigue es, en mi opinión, de mucho peso:

> ... este espacio mental hace posible el espacio físico,... este espacio puro no es de ninguna manera una cualidad de las cosas en sí mismas, sino una forma de nuestra facultad sensible de representación;... todos los objetos del espacio son meras apariencias... no cosas en sí, sino representaciones de nuestra intuición sensible.

El pensamiento kantiano se extendió también a la física. En época de Kant era visible la exitosa física newtoniana. Llegó incluso a considerar tan necesaria la mecánica newtoniana como la matemática:

> Kant afirmó haber deducido las leyes del movimiento de Newton de la razón pura y reclamó que ellas son las únicas suposiciones bajo las cuales la naturaleza es comprensible (Falk, 1995: 103 y ss.).

Volviendo a las leyes de la geometría, estas son según Kant como un mecanismo del hombre para racionalizar las sensaciones. Así se comprende claramente por qué las geometrías no euclidianas pusieron en duda el mismo núcleo de la teoría kantiana del conocimiento. Por otra parte, inquieta pensar que, tal vez, uno de los motivos que llevaron a Gauss a no publicar sus hallazgos sobre la nueva geometría, fue que no se sintió en condiciones, o con ganas, de retar a la imponente concepción del filósofo de Könisberg[15].

15 Könisberg es famosa por ser la ciudad de los siete puentes, que estimularon a Euler para obtener resultados sobre teoría de grafos.

[Capítulo 14]

Otras organizaciones de la geometría de Euclides

Si bien hemos presentado hasta aquí diferentes esquemas de organización de la geometría euclidiana, a saber: el de los *Elementos*, el de Hilbert y, con ligeras referencias, el que surge de los axiomas de Pasch-Rey Pastor, vale mencionar con algún detalle otras organizaciones axiomáticas de la geometría de Euclides, con el afán de hacer notar cómo a través de puntos de vista diversos se puede acceder a un mismo conjunto de verdades.

El enfoque de Pedro Puig Adam

Lo interesante de la propuesta de este matemático español (1900-1960), contenida en la obra en dos tomos *Curso de geometría métrica*, es la utilización del movimiento geométrico. Dicho trabajo, aunque pensado principalmente para técnicos e ingenieros, no renuncia al rigor en su exposición. Nos dice este autor:

> Yo en la elección de axiomas hube de preferir los que establecen las propiedades generales del movimiento a los que postulan las particulares de la congruencia de segmentos y ángulos... Tales axiomas conducen invariablemente a la "triangulación" de la Geometría, al rígido reticulado euclídeo cuyas mallas triangulares aprisionan las figuras dictando leyes de igualdad y proporción. Más educativo parece, (...) caracterizar desde un principio los movimientos, las transformaciones típicas de la Geometría y ligar a cada figura aquellas transformaciones que ponen de manifiesto sus propiedades (Puig Adam, 1981: VI).

Puig Adam adopta y adapta los cinco grupos de axiomas de Hilbert. Sus grupos son: existencia-enlace, orden-separación, movimiento-congruencia, paralelismo y continuidad.

A continuación reseño los principales puntos de interés.

I) Axiomas de existencia-enlace:

Ax. I, 1 – Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados *puntos,* cuyo conjunto llamaremos *espacio*.

Ax. I, 2 – Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados *planos,* y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados *rectas.*

De este axioma surge que fuera de cada recta y de cada plano existen otros puntos. La clave está en la palabra "parciales". Sigamos.

Ax. I, 3 – Por dos puntos distintos pasa una recta y solo una.

Ax. I, 4 – Por tres puntos no alineados pasa un plano y solo uno.

Ax. I, 5 – Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los demás puntos de la recta lo están también.

II) Axiomas de orden-separación:

Es necesaria la siguiente definición: un conjunto de elementos está *linealmente ordenado* si es posible relacionar sus elementos con la relación "preceder", tal que dados dos elementos *A* y *B*, *"A* precede a *B"* *o "B* precede a *A"*, y si *"A* precede a *B" y "B* precede a (un tercer elemento) C", entonces *"A* precede a *C"*.

Ax. II, 1 – La recta es un conjunto linealmente ordenado de puntos que no tiene ni primero ni último punto, y en el que no hay puntos consecutivos[1].

Una forma alternativa de este axioma es: La recta es un conjunto de puntos linealmente ordenado, abierto y denso.

Se definen en seguida *semirrecta* y *segmento*, ya que los axiomas precedentes lo permiten. No incluyo aquí las definiciones.

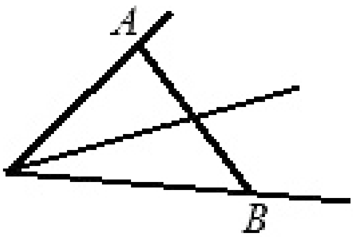
Ax. II, 2 – (Axioma de la división del plano) Toda recta de un plano establece una clasificación de los puntos no contenidos en ella en dos únicas clases o regiones tales que:

- Todo punto exterior a la recta pertenece a una u otra región.

- El segmento que une dos puntos de la misma (distinta) región, no corta (corta) a la recta.

Se definen ahora *semiplano, ángulo, triángulo* y *polígono.*

En esta parte se demuestra que (Fig. 182): "el segmento que une dos puntos *A* y *B* de lados distintos de un ángulo convexo, corta a toda semirrecta interior al ángulo".

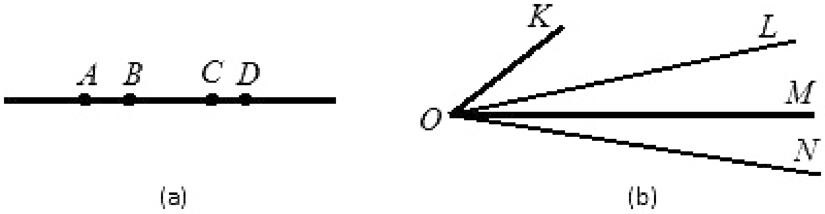


(Fig. 182)

1 Si dos elementos de una sucesión son consecutivos, entre ellos no hay ningún otro elemento. Que no haya puntos consecutivos en la recta puede también decirse así: *entre dos puntos de la recta siempre existe otro punto. O* también: *la recta es un conjunto denso.*

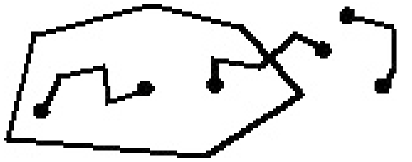
En otros desarrollos este teorema es el *axioma del segmento con extremos en los lados de un ángulo*, que es un postulado de orden.

El concepto de "separación" resulta imprescindible para definir semirrecta (un punto de una recta la separa en dos regiones, cada una de las cuales se denomina semirrecta), semiplano (una recta de un plano lo separa en dos regiones...), pares de puntos separados (B y D son separados por A y C, Fig. 183 a) y pares de semirrectas separadas en un ángulo (las semirrectas $\overrightarrow{OL}$ y $\overrightarrow{ON}$ son separadas por $\overrightarrow{OK}$ y $\overrightarrow{OM}$, Fig. 183 b).



(Fig. 183)

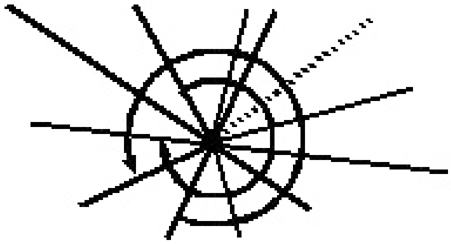
Es interesante la inclusión del teorema de Jordan[2]: dado un polígono convexo, dos puntos de su interior (exterior) pueden unirse mediante una poligonal[3] que no corta al contorno. Toda poligonal que une un punto interior con otro exterior al polígono corta al contorno (Fig. 184).



(Fig. 184)

Vinculado con la relación "preceder" se llega al concepto de *sentido* en la recta y al de *vector* como segmento orientado.

Se considera también el sentido en el haz de semirrectas con origen común al que se le ha quitado un elemento (haz reducido); resulta así que ese haz está linealmente ordenado. En la Fig. 185 se ha marcado con línea punteada la semirrecta omitida y se han indicado los dos sentidos posibles del haz, que resulta ser así un conjunto abierto y denso.



(Fig. 185)

2 Camille Jordan (1838-1922), matemático francés.

3 En algunos textos la poligonal es denomina "quebrada".

Un “plano orientado” se logra orientando un único haz del mismo. También hay dos sentidos en una poligonal[4].

III) Axiomas de movimiento-congruencia:

Ax. III, 1 – Los movimientos del plano son transformaciones puntuales biunívocas del mismo.

Más que un axioma esto es una definición de movimiento: se trata de una *función puntual* es decir, que asigna puntos a puntos. El correspondiente de un punto según un movimiento se denomina su *homólogo.*

Los dos axiomas siguientes caracterizan la noción de “rigidez” o indeformabilidad de las figuras.

Ax. III, 2 – Todo movimiento conserva las relaciones de enlace y orden de puntos.

Ax. III, 3 – Ningún movimiento puede transformar un segmento o ángulo en una parte de él mismo.

Seguimos con unos axiomas relacionados con la noción de grupo.

Ax. III, 4 – La transformación resultante de aplicar dos movimientos sucesivos es otro movimiento.

La aplicación de dos movimientos sucesivos se denomina su *producto.*

Ax. III, 5 – La transformación inversa de todo movimiento es otro movimiento.

O sea que todo movimiento tiene un recíproco. La *identidad* es un caso particular de movimiento, ya que el producto de dos movimientos recíprocos es, precisamente, la identidad.

Los Axiomas III, 4 y III, 5 pueden reemplazarse por un único postulado: *Los movimientos del plano forman grupo*[5].

Sigue el “axioma de la determinación del movimiento”:

Ax. III, 6 – Existe un movimiento y solo uno que transforma una semirrecta en otra, y un determinado semiplano limitado por la recta primera en un determinado semiplano limitado por la segunda.

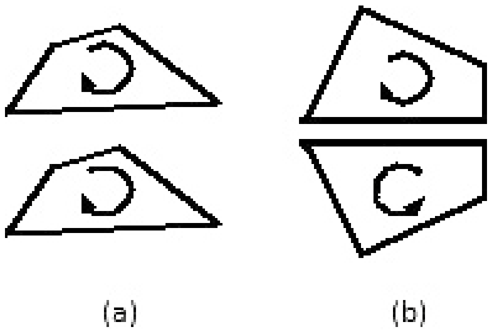
Puede definirse la congruencia diciendo que dos figuras F y F’ son congruentes si existe un movimiento que transforma F en F’.

Es interesante la distinción que hace el autor sobre congruencias *directa* e *inversa.* En la primera se conserva el sentido del plano orientado y por lo tanto de sus haces y poligonales (Fig. 186 a). En la segunda, el sentido cambia por el opuesto (Fig. 186 b). Sin demasiado rigor, podemos distinguir intuitivamente ambas congruencias así: en la directa basta con mover la figura hasta que se superponga

4 No se entrará en detalles, léase para ampliar a Puig Adam (1981: 17-18).

5 Cuando un conjunto de transformaciones contiene todas las transformaciones inversas y los productos de dos cualesquiera del conjunto, decimos que dichas transformaciones forman grupo. Véase cap. 6, pág. 112

con su congruente; en la inversa, es preciso “sacar” la figura del plano y abatirla sobre la otra por su cara opuesta, como cuando hacemos que dos guantes (derecho e izquierdo) se superpongan.



(Fig. 186) (a) figuras directamente congruentes; (b) figuras inversamente congruentes.

El transporte del segmento y del ángulo se obtienen a partir del Axioma III, 6. Otras consecuencias hasta aquí en la teoría son la congruencia de triángulos (criterios LAL y ALA) y de polígonos.

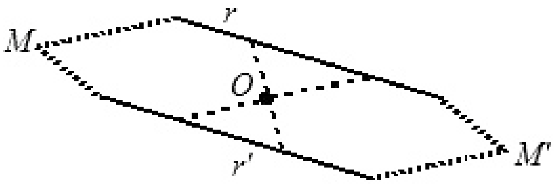
Veremos ahora cómo el autor determina la existencia de rectas paralelas y perpendiculares a partir de movimientos.

Consideremos un movimiento que transforma una semirrecta de origen *O* y uno de los semiplanos que su recta determina, en la semirrecta y semiplano opuestos. Tal movimiento es la *simetría central* de centro *O*.

Se llama transformación *involutiva* a aquella cuyo producto por sí misma (o sea, su cuadrado) es la identidad. La simetría central es involutiva.

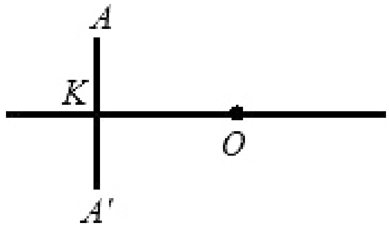
Toda semirrecta de origen *O* se transforma en sí misma mediante este movimiento. Una consecuencia de esto es la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice.

Cualquier par de rectas *r*, *r’*, simétricas respecto de *O* que no pasan por *O*, no se cortan (Fig. 187). En efecto, si se cortaran en un punto *M* también lo harían en su simétrico *M’*, entonces ambas rectas coincidirían. Llamaremos *paralelas* a estas rectas.



(Fig. 187)

Sea ahora un movimiento que deja invariable una semirrecta, pero que transforma uno de los semiplanos que su recta determina en el semiplano opuesto. Tal movimiento es la *simetría axial* y también es involutivo. Todo punto del eje se transforma en sí mismo, y si dos puntos *A* y *A’* son simétricos, la recta *AA’* tiene por simétrica a la recta *A’A*, o sea, a ella misma. Si *K* es la intersección del eje con *AA’*, el $\angle OKA$ se transforma en el $\angle OKA'$, adyacente e igual a él (Fig. 188). Llamaremos *recto* a todo ángulo igual a su adyacente y *perpendiculares* a las semirrectas que lo forman (y, por extensión, a las rectas que las contienen).



(Fig. 188)

Se definen, desde aquí *mediatriz*, *bisectriz* y *punto medio*. También se prueba la unicidad de la perpendicular por un punto, que todos los ángulos rectos son congruentes[6], las propiedades del triángulo isósceles y el criterio de congruencia LLL.

El desarrollo continúa con el estudio de la *traslación* y su relación con el paralelismo, demostrándose que dos rectas homólogas en la traslación son paralelas. El autor llama *guía* a la recta que contiene al vector asociado a la traslación.

IV) Axioma de paralelismo:

Ax. IV – Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella.

Este postulado resulta fundamental en la prueba de que todas las traslaciones del plano forman un grupo conmutativo o abeliano. Agrega el autor:

> Es preciso darse cuenta de que ello se debe precisamente al hecho de haber admitido como axioma la unicidad de la paralela a una recta por un punto. De otro modo no hubiésemos podido probar siquiera que las traslaciones forman grupo, como no lo forman los giros todos del plano, que en las Geometrías no euclídeas tienen propiedades similares a las traslaciones (Puig Adam, 1981: 44).

Se sigue con los teoremas:

a) dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí, y

b) el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es otra recta paralela a la recta dada[7].

Por su gran extensión voy a obviar mucho del contenido tratado por Puig Adam, e iré directamente al último postulado.

6 Esto es el postulado IV de Euclides que en esta organización es teorema.

7 Recuérdese que en geometría hiperbólica ese lugar geométrico es el *hiperciclo.* La afirmación (b) es equivalente al Postulado V, en versión de Posidonio de Rodas.

V) Axioma de continuidad:

> Hemos visto... que todo punto de una recta establece una clasificación de los restantes en precedentes y siguientes a él. Podemos preguntarnos si, recíprocamente: a toda clasificación que cumpla idénticas condiciones de ordenación corresponde un punto. La intuición parece admitirlo así: démosle, pues, expresión explícita enunciando el siguiente axioma:
>
> Ax. V (Axioma de Dedekind) – Dada una clasificación de los puntos de una recta en dos clases C_1 y C_2 que cumplan las condiciones:
>
> 1ª – existen puntos de la recta en una y otra clase;
>
> 2ª – todo punto de la recta está en una u otra clase;
>
> 3ª – todo punto de C_1 precede a todo punto de C_2,
>
> existe un punto y solo uno *P* de la recta, tal que todos los puntos que le preceden pertenecen a la clase C_1 y todos los que se siguen pertenecen a la clase C_2 (Puig Adam, 1981: 71).

El autor, según su propia declaración, prefirió este único axioma que solo exige conceptos de orden, al par equivalente de axiomas de Arquímedes y Cantor, los cuales requieren las nociones de congruencia y desigualdad (véase cap. 6, pág. 112).

No continuaré exponiendo este comentario del *Curso de geometría métrica* por razones de espacio, pero recomiendo su lectura, la que es sumamente instructiva para apreciar un enfoque diferente de la geometría euclidiana, además de brindarnos un riquísimo contenido.

El enfoque de Edwin E. Moise

En su libro *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado* el matemático norteamericano Edwin Evariste Moise (1918-1998) expone un novedoso acercamiento a la geometría euclidiana propuesto por G. Birkhoff (véase cap. 6, nota 21), a partir de la teoría de los números reales. El libro es extenso y riguroso y no trata solo de geometría euclidiana. Describiré apenas el tramo inicial, tal como hice con el anterior autor.

Se comienza con una estructura, denotada por la terna

[S, L, P],

donde S es un conjunto llamado "espacio" cuyos elementos son denominados "puntos"; L es una colección de subconjuntos de S llamados "líneas" y P es otra colección de subconjuntos, los "planos"[8].

8 En muchos textos traducidos del inglés se usa el término "línea" para "recta". El equivalente en inglés de nuestra recta es *straight line* o sea "línea recta".

Vamos a los axiomas. El número 0 es solo un recordatorio, como el mismo autor aclara[9].

I-0. Todas las líneas y planos son conjuntos de puntos.

I-1. Por dos puntos cualesquiera dados solo puede pasar una línea que contenga a los dos.

I-2. Por tres puntos diferentes no colineales solo puede pasar un plano que contenga a los tres.

I-3. Si dos puntos están en un plano, entonces la línea que los contiene está en el plano.

I-4. Si dos planos se intersectan, la intersección es una línea.

El estilo de Moise es sumamente ameno. A continuación de estos enunciados aclara:

> Si el lector revisa cuidadosamente lo anterior, verá que los postulados I-0 a I-4 se satisfacen en la "geometría" sin imaginación en la que hay exactamente un punto *P* en *S,* y este punto *P* es una línea y un plano. Para evitar, cuando menos, estas trivialidades extremas enunciaremos inmediatamente otro postulado (Moise, 1974: 59).

I-5. Toda línea contiene cuando menos dos puntos. Todo plano contiene cuando menos tres puntos no colineales. Y S contiene cuando menos cuatro puntos no coplanares.

Luego de esta sección dedicada a la incidencia de los entes primitivos, y que contiene, como otros desarrollos, ciertos teoremas elementales (no incluidos aquí), se pasa a la axiomatización de la congruencia.

Se define una *función distancia* (*d*) que verifica los postulados siguientes:

D-0. d es una función d: $S \times S \rightarrow R$[10].

D-1. Para cada P, Q: $d(P, Q) \geq 0$.

En ocasiones se denotará PQ a la distancia entre P y Q.

D-2. $d(P, Q) = 0$ si y solo si $P = Q$.

D-3. $d(P, Q) = d(Q, P)$ para cada P y Q en S.

El lector puede revisar en cap. 11, pág. 220 para comparar lo dicho allí sobre la función distancia. Una diferencia es que no se postula la *desigualdad triangular*, pues esta es demostrada con posterioridad.

9 Algunos acostumbran a contar enumerando desde 0. Por ejemplo, en algunos libros hay Capítulo 0. No estoy de acuerdo con ello, ya que se comienza a contar naturalmente desde 1. Este argumento es sostenido por quienes (me incluyo) no consideran natural al 0. De hecho, en la historia de la numeración todos los pueblos que contaban tenían 1, pero pocos, muy pocos, descubrieron el 0, solo los que produjeron sistemas numéricos posicionales.

10 O sea del producto cartesiano S × S en el conjunto de los números reales. La función asigna a cada *par ordenado* de puntos de S un número real que será la *distancia* entre ellos.

La estructura inicial de la cual se partió resulta ampliada. Ahora es:

[S, L, P, d].

Un nuevo axioma, el *postulado de la regla*, conecta la función distancia con la geometría. Pero antes hay que definir *sistema coordenado:*

Definición: sea $f: L \rightarrow R$ una función uno-a-uno (o inyectiva) entre una línea L y los números reales. Si para todos los puntos P y Q de L,

$$d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|,$$

entonces f es un sistema coordenado para L. La *coordenada* de P es un número real $x = f(P)$.

D-4 (el postulado de la regla). Cada línea admite un sistema de coordenadas.

> El postulado D-4 (...) nos proporciona una regla infinita que se puede colocar en cualquier línea y usar para medir distancias a lo largo de la línea. Esta clase de regla no está disponible en la geometría euclidiana clásica (Moise, 1974: 75).

El "teorema de la colocación de la regla" asegura que si P y Q son dos puntos cualesquiera de una recta, es posible establecer en ella un sistema coordenado que tenga a P por origen, y tal que la coordenada de Q sea positiva.

El concepto de "entre" para tres puntos colineales A, B y C, se define así: "B está entre A y C" (simbólicamente A-B-C) si

$$AB + BC = AC.$$

Entre los teoremas de esta parte cito algunos cuyos enunciados el lector identificará como axiomas de otros desarrollos geométricos, referidos al orden lineal.

- Si A-B-C, entonces C-B-A.

- De tres puntos cualesquiera en una línea, solo uno está entre los otros dos.

- En una línea cualquiera se pueden nombrar cuatro puntos A, B, C, D, en un cierto orden tal que A-B-C-D.

- Si A y B son dos puntos cualesquiera entonces existe un punto C tal que A-B-C y un punto D tal que A-D-B.

La congruencia de segmentos se *define* mediante la distancia. Diremos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si $d(A,B) = d(C,D)$.

A partir de esto se prueba que la congruencia es reflexiva, simétrica y transitiva (es decir, que es una relación de equivalencia), el teorema de transporte del segmento, los teoremas de adición y sustracción de segmentos, y la existencia y unicidad del punto medio de un segmento.

Para abordar la separación y el orden en el plano se introduce:

PS (el postulado de separación de los planos). Dados una línea y un plano que la contenga, el conjunto de todos los puntos del plano que no están en la línea es la unión de dos conjuntos tales que (1) cada uno de los conjuntos es convexo, y (2) si P pertenece a uno de los conjuntos y Q pertenece al otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ intersecta la línea.

Resulta muy interesante e instructiva la demostración del "teorema de la barra transversal", que no es otra cosa que el axioma (aquí teorema) del segmento con extremos en los lados de un ángulo. Se trata de una prueba bastante extensa pero original de esa proposición (Moise, 1974: 99-102).

Hay otro postulado similar a SP para la separación en el espacio, el cual no transcribiré.

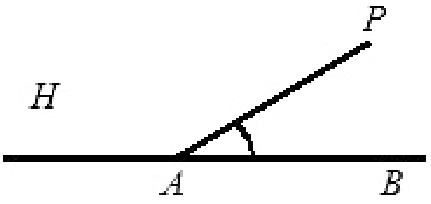
Para ir finalizando con esta breve muestra falta ocuparnos de los ángulos.

Análogamente a lo hecho con la distancia, se define una *función medida angular* (m) que satisface unos postulados que son, en términos del autor, "descripciones abstractas del comportamiento familiar de los transportadores" (Moise, 1974: 111). Ellos son:

M-1. *m es una función $A \rightarrow$* R, donde A es el conjunto de todos los ángulos y R es el conjunto de los números reales.

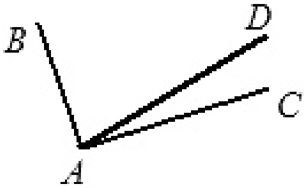
M-2. *Para cada ángulo $\angle A$, $m(\angle A)$* está entre 0 y 180[11].

M-3 (el postulado de la construcción de un ángulo). Sea $\overrightarrow{AB}$ una semirrecta en el borde del semiplano H. Para todo número r entre 0 y 180 hay exactamente una semirrecta $\overrightarrow{AP}$, $P \in H$, tal que $m(\angle PAB) = r$ (Fig. 189).



(Fig. 189)

M-4 (el postulado de la adición de ángulos). *Si D está en el interior del $\angle BAC$ entonces $m(\angle BAC) = m(\angle BAD) + m(\angle DAC)$* (Fig. 190).



(Fig. 190)

11 En relación con el uso del símbolo de *grado sexagesimal* (°) el autor, con un toque de humor, escribe: "(...) porque los valores de la función m son simplemente números reales; ellos se valen por sí mismos y no necesitan banderitas que indiquen de dónde vienen" (Moise, 1974: 110).

Luego de definir *par lineal* de ángulos (nuestros "ángulos adyacentes"), se incluye:

M-5 (el postulado del suplemento). Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

La congruencia de ángulos se define, como la de segmentos, en términos de sus medidas: $\angle ABC \cong \angle DEF$ si $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$.

Si los ángulos de un par lineal son congruentes, cada uno de ellos se llama ángulo *recto*.

La estructura de la geometría vuelve a ampliarse; ahora se trata de

[S, L, P, *d*, *m*].

Como es natural, siguen en el desarrollo las demostraciones de: a) la congruencia de ángulos es una relación de equivalencia; b) el teorema del transporte del ángulo; c) el teorema de la adición de ángulos; d) los ángulos opuestos por el vértice (llamados aquí *verticales*) son congruentes, etc.

Respecto de la congruencia de figuras considera Moise, como Puig Adam, las congruencias directa e inversa, que quedan definidas a través de una función inyectiva. Para los triángulos procede así:

Sean los triángulos *ABC* y *DEF,* y una correspondencia uno-a-uno

$ABC \leftrightarrow DEF$

entre sus vértices[12]. La correspondencia es una congruencia y los triángulos son congruentes si se cumplen las seis condiciones siguientes:

$\overline{AB} = \overline{DE}, \overline{AC} = \overline{DF}, \overline{BC} = \overline{EF},$

$\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F.$

Ahora se introduce el siguiente postulado:

LAL. Sea una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo, la correspondencia es una congruencia.

Continúan los teoremas de los ángulos del triángulo isósceles, los criterios de congruencia ALA y LLL, existencia y unicidad de la bisectriz y la perpendicular, etc.

Un agregado importante es la explicación de un modelo sencillo (que no detallaré) que prueba la independencia del postulado LAL (Moise, 1974: 131).

12 Esto es: a *A* corresponde *D*, a *B* corresponde *E* y a *C* corresponde *F*.

El autor dedica un capítulo a comparar su enfoque (métrico) con el de Euclides-Hilbert (sintético). Resulta interesante la tabla comparativa siguiente:

	Enfoque métrico	*Enfoque sintético*
La estructura dada	[S, L, P, d, m]	[S, L, P, B, =][a]
Distancia	Dada en la estructura	No se menciona
Medida de ángulos	Dada en la estructura	No se menciona
Congruencia de segmentos	Definida en términos de distancia	Dada en la estructura
Congruencia de ángulos	Definida en términos de medida angular	Dada en la estructura
Propiedades de congruencia	Dadas en teoremas	Dadas en postulados
Adición	Efectuada con números	Efectuada con clases de congruencia
Desigualdades	Definidas entre números	Definidas entre clases de congruencia

El desarrollo de la geometría euclidiana prosigue luego de un salto de dos capítulos, con el estudio del paralelismo y la semejanza. El postulado adoptado es el siguiente:

P-1. Dados una línea y un punto exterior, existe únicamente una línea que pasa a través del punto dado y que es paralela a la línea dada.

El estudio del área se inicia con el área de regiones poligonales y se pone *provisoriamente* sobre una base axiomática, así[13]:

A-1. a es una función $\mathfrak{R} \to$ R, donde $\mathfrak{R}$ es el conjunto de todas las regiones poligonales y R es el conjunto de los números reales.

A-2. Para toda región poligonal K, $a(K) > 0$.

A-3 (el postulado de congruencia). Si dos regiones triangulares son congruentes entonces tienen la misma área.

A-4 (el postulado de aditividad). Si dos regiones poligonales se intersectan únicamente en fronteras y vértices (o no se intersectan), entonces el área de su unión es la suma de sus áreas.

A-5 (el postulado de unidad). El área de una región rectangular es el producto de su base por su altura.

Nuevamente se amplía la estructura de la geometría, siendo ahora:

[S, L, P, d, m, a]

a Aquí B es una relación de separación y "=" representa las relaciones de congruencia para segmentos y ángulos.

13 Los axiomas A-1 a A-5 son transitorios, pues luego se demuestra que hay una función de área que los satisface a todos.

Más adelante se incluye una forma más débil de A-5: *si un cuadrado tiene lados de longitud 1, entonces su área es 1.* Y se muestra cómo este implica a aquel.

Finalmente, ¿qué hay de la continuidad? Bien, bajo este enfoque, al estar los números reales al inicio de las consideraciones, y las funciones distancia y medida angular definidas con la participación de estos números, la geometría “hereda” la continuidad del conjunto R. El capítulo inicial del libro se ocupa, precisamente, de ese conjunto: sus operaciones básicas y propiedades, y las relaciones de orden. Dos postulados se incluyen también, vinculados con la *continuidad*, a saber:

A (el postulado de Arquímedes). Sean M y e dos números positivos cualesquiera. Entonces existe un entero positivo n tal que $ne > M$.

C-1 (el postulado de compleción de Euclides). Cada número positivo tiene una raíz cuadrada positiva.

> Llamamos a este postulado Euclidiano por la parte que desempeña en la geometría. Eventualmente este postulado asegurará que las circunferencias intersectan las líneas, y a otras circunferencias, en las maneras que esperamos lo hagan (Moise, 1974: 44).

A estos postulados se añade el de Dedekind, ya comentado, de las cortaduras, cuya inclusión el autor posterga hasta que lo considera necesario. Queda así tratada la continuidad en esta propuesta geométrica más que interesante y altamente recomendada para su estudio.

Conclusión

> Me parece, atenienses, que solo Dios es el verdadero sabio, y que esto ha querido decir por su oráculo, haciendo entender que toda la sabiduría humana no es gran cosa, o por mejor decir, que no es nada; (...), y como si dijese a todos los hombres: "el más sabio entre vosotros es aquel que reconoce, como Sócrates, que su sabiduría no es nada"[1].

> La necesidad fue llamada madre de los inventos... pero la curiosidad fue la madre de la ciencia (Sarton, 1965: 21).

Estoy dichoso por haber concluido esta *Introducción...* luego de haber tenido por mucho tiempo el libro en mi mente, en mis papeles y en mi intención. Creo haber hallado el mejor título a este trabajo, porque me queda la sensación de solo haber llegado a una orilla. Y ante mí, una inmensa extensión digna de ser explorada, con el espíritu simple de un niño que desea hurgar qué hay "más allá de la puerta" de su reducido mundo, y a sabiendas de que otros ya han visto lo que él aún no pudo ver. Deseo cuanto antes traspasar el umbral, para seguir aprendiendo. ¡Que no muera la curiosidad!

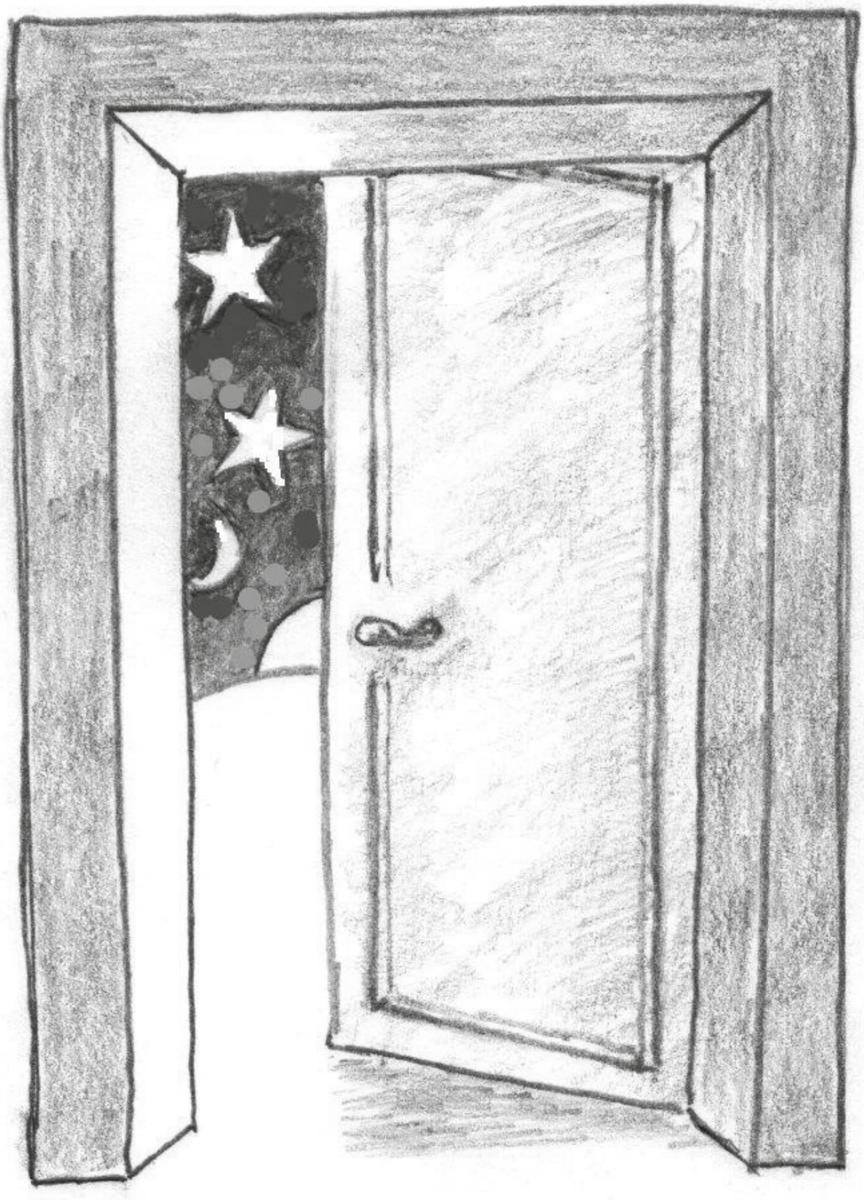
En toda rama de la matemática, al ser ella una ciencia varias veces milenaria, los estudiosos experimentamos esa sensación angustiante de no poder abarcarlo todo. Pero más que entristecernos por ignorar, es bueno que disfrutemos con alegría lo que podemos conocer.

> Rechaza la sed de libros —dice Marco Aurelio—, para morir no con lamentos, sino con serenidad. (...) ...el cálculo demuestra que la capacidad de leer es pequeña, excepto en aquellos cuya profesión es la crítica y que saben apreciar el contenido de una obra solamente con hojearla. Suprimid de la vida humana los trabajos, las preocupaciones, los cuidados del cuerpo y del mundo, los viajes, los accidentes, queda poco tiempo para la lectura. El que hubiera leído diez libros al año y hubiera hecho esto durante medio siglo no habría conocido nada más que una ínfima parte de lo que contiene la biblioteca más pobre de su ciudad. (...) Y, quizá, este lector regular, al cabo de treinta años, ¿no preferiría releer los libros que le habían gustado en su juventud en vez de coger otros nuevos? (Guitton, 2005: 83).

Ojalá el lector de este libro haya vivido conmigo la indescriptible sensación de descubrir ese "universo creado de la nada" (en el decir del joven János Bolyai), y las increíbles relaciones que esconden los más diversos temas matemáticos.

Muchos asuntos han quedado solo mostrados. ¡Ojalá el lector mantenga viva su capacidad de asombro!

1 De *Apología de Sócrates*, en Patricio de Azcárate (1871). *Platón, Obras completas.* Madrid. Recuperado de www.filosofia.org, julio 2015.



Bibliografía

Amaldi, Ugo (1921). *Los conceptos de recta y de plano*. En Enriques, Federigo (coomp.), *Cuestiones relativas a la matemática elemental, Tomo I: Fundamentos de la geometría (Art. III).* Valladolid: Imprenta Castellana.

Ayres, Frank (1971). *Teoría y problemas de geometría proyectiva* (serie de compendios Schaum). México: McGraw-Hill.

Bartrina y Capella, José (1908). *Tratado didáctico de las geometrías no-euclídeas.* Memorias de la Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, Tercera época, vol. VII, Nº 2. Barcelona: A. López Robert, impresor.

Bonola, Roberto (1921). *Teoría general de las paralelas.* En Enriques, Federigo (coomp.), *Cuestiones relativas a la matemática elemental, Tomo I: Fundamentos de la geometría (Art. XII).* Valladolid: Imprenta Castellana.

Bonola, Roberto (1945). *Geometrías no euclidianas.* Colección "Historia y filosofía de la ciencia". Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina.

Boyer, Carl (1996). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza.

Cabrera, Emanuel (1949). *Los Elementos de Euclides como exponente del «milagro griego».* Buenos Aires: Librería del Colegio.

Cannon, James; Floyd, William; Kenyon, Richard y Parry, Walter (1997). *Hyperbolic geometry,* Mathematical Science Research Institute Publications (MSRI Publications), Flavors of Geometry, Vol. 31.

Casaubón, Juan (2006). *Nociones generales de lógica y filosofía.* Buenos Aires: EDUCA.

Colerus, Egmont (1972). *Breve historia de las matemáticas (tomo 1).* Madrid: Doncel.

Colerus, Egmont (1973). *Breve historia de las matemáticas (tomo 2).* Madrid: Doncel.

Crespo Crespo, Cecilia; Farfán, Rosa y Lezama, Javier (2009). *Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica.* Revista (virtual) Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol 12 (1).

Coxeter, Harold (1971). *Fundamentos de geometría.* México: Limusa-Wiley.

Euclides de Alejandría y Simson, Robert (1774). *Los seis primeros libros, y el undécimo y duodécimo de los Elementos de Euclides.* (Traducción de *Elementos* de la versión latina de Federico Comandino, ilustrado, con notas críticas y geométricas de R. Simson de la Universidad de Glasgow). Madrid: D. Joachin Ibarra Impresor de Cámara de S. M.

Falk de Losada, Mary (1994 y 1995). "El clamor de los beocios y el pensamiento revolucionario de Gauss". Boletín de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Nueva Serie Vol. 1 Nº 2 (1994) y Vol. II Nº 1 (1995).

Farrington, Benjamín (1979). *Ciencia griega.* Barcelona: Icaria.

Ferrater Mora, José (1994): *Diccionario de filosofía.* Barcelona: Ariel.

Gans, David (1955). "An introduction to elliptic geometry", New York University, The American Mathematical Monthly Vol. 62, Nº 7, Part 2: Contributions to geometry, Aug.-Sep. 1955.

Grossman, Stanley I (1995). *Álgebra lineal. Quinta edición.* México: McGraw Hill.

Guasco, María; Crespo Crespo, Cecilia y otros (1996). *Geometría, su enseñanza.* Buenos Aires: CONICET.

Guitton, Jean (2005). *El trabajo intelectual.* Madrid: Rialp.

Haussman, Bernard (1968). *Problemas filosóficos de la matemática moderna.* Buenos Aires: Columba.

Hewitt, Paul (2007). *Física conceptual, 10ª edición.* México: Pearson Educación.

Hilbert, David (1902). *The foundations of geometry.* (Trad. al inglés por E. J. Towsend). Chicago: The Open Court Publishing Company.

Hofstadter, Douglas (2007). *Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle.* Barcelona: Tusquets Editores.

Hull, Lewis (1978). *Historia y filosofia de la ciencia.* Barcelona: Ariel, Barcelona.

Kline, Morris (2002). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Vol. 1.* Madrid: Alianza.

Koestler, Arthur (1986). *Kepler* (de la *B*iblioteca Salvat de grandes biografías*)*. Barcelona: Salvat.

Levi, Beppo (2006). *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Meschkowski, Herbert (1967). *Introducción a la matemática moderna.* Madrid: Selecciones científicas.

Moise, Edwin (1974). *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado.* México: CECSA.

Puig Adam, Pedro (1981). *Curso de geometría métrica (tomo I, Fundamentos).* Madrid: Gómez Puig Ediciones.

Saccheri, Gerolamo (1904). *L'Euclide Emendato. Traduzione e note del Prof. G. Boccardini.* Milano: Ulrico Hoepli editor.

Santaló, Luis (1963). *Geometrías no euclidianas (Cuadernos de Eudeba, Nº 45).* Buenos Aires: Eudeba.

Sarton, George (1965). *Historia de la Ciencia, Vol. 1. La ciencia antigua durante la edad de oro griega.* Buenos Aires: Eudeba.

Sarton, George (1965). *Historia de la ciencia, Vol. 2. Ciencia y cultura helenísticas en los últimos tres siglos a. C.* Buenos Aires: Eudeba.

Smogorzhevski, A. (1978). *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Moscú: MIR.

Toranzos, Fausto (1943). *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática.* Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina.

Toranzos, Fausto I. (1949). "El panorama actual de la filosofía de la matemática y la influencia en él de D. Hilbert". Actas del Primer Congreso Nacional de Filosofía, Mendoza, Argentina, marzo-abril 1949, tomo 3.