CUADERNOS PARA DOCENTES

MATEMÁTICA

Diálogo Escuela Secundaria y Universidad

Javier Cottet
Alejandra Depaoli
Docentes

Diana Grinóvero
Coordinadora

Contenidos y propuestas para el aula

EDITORIAL UADER

Dirección Programas Académicos
División Formación Docente Continua
Secretaría Académica | UADER

CUADERNOS PARA DOCENTES

MATEMÁTICA

Diálogo Escuela Secundaria y Universidad

Javier Cottet
Alejandra Depaoli
Docentes

Diana Grinóvero
Coordinadora

Contenidos y propuestas para el aula

Dirección Programas Académicos
División Formación Docente Continua

CUADERNOS PARA DOCENTES

MATEMÁTICA

Diálogo Escuela Secundaria y Universidad

Contenidos y propuestas para el aula

Diálogo escuela secundaria y universidad : Biología, Física, Química, Matemática / compilado por Diana Grinóvero. - 1a ed. compendiada. - Paraná : Editorial Uader, 2018.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-9581-50-0

1. Escuela Secundaria. 2. Enseñanza. 3. Universidad. Grinóvero, Diana , comp.
CDD 507.1

Secretaría de Integración y Cooperación con la Comunidad y el Territorio
Entre Ríos, Argentina, 2017.

Carlos Gardel 38
E3100FGA Paraná
editorial@uader.edu.ar
+54 (0343) 5255772
www.uader.edu.ar

Índice

Presentación

Estimados docentes:

La Universidad Autónoma de Entre Ríos (UADER) viene desarrollando acciones tendientes a vincular la escuela secundaria y la educación superior, con el objeto de favorecer la inclusión y la permanencia de los adolescentes y jóvenes entrerrianos, tanto en carreras técnicas como en licenciaturas y/o profesorados. En relación a esto, en el segundo semestre del año 2013, desde la División Formación Docente Continua se llevó a cabo en Paraná una capacitación destinada a docentes del último tramo del secundario, denominada "Jornadas de abordaje de la Matemática, la Física y la Química para el ingreso a la Universidad", espacio que congregó alrededor de 120 docentes.

Como continuidad de la propuesta mencionada anteriormente se ha elaborado este material concebido para acompañar al docente en el proceso de enseñanza de la química en los últimos años de las escuelas secundarias.

En este cuaderno, el docente encontrará información, sugerencias y orientaciones para la planificación y organización del trabajo en el aula, el uso de materiales y recursos, el acompañamiento de los estudiantes y otras tareas implicadas en esta última etapa de la educación obligatoria. Cabe mencionar que en la selección de contenidos y actividades siempre se ha considerado que son ustedes y sus alumnos, los actores educativos que diseñan y desarrollan las propuestas de enseñanza.

Desde este marco, se propone reflexionar sobre el sentido y el significado acerca del qué, cómo, cuándo y para qué se enseña y se evalúa, en pos de brindar a los estudiantes algunas herramientas que les permitan realizar un trayecto universitario satisfactorio.

Esperamos les resulte este cuaderno un recurso significativo para su práctica pedagógica y posibilite el mejoramiento de los aprendizajes de esta disciplina a sus alumnos.

Mg. Gustavo Marcos
Secretario Académico UADER

Propósitos

Pretendemos acercar este cuaderno de actividades y acompañamiento para el docente de matemática con el objetivo de poner a su disposición de una manera sistematizada los contenidos de la ciencia que consideramos fundamentales para el ingreso a carreras, de grado y pre-grado y posibilitar así, una mayor articulación entre la Educación Secundaria y la Universidad, buscando mejorar las trayectorias de nuestros estudiantes.

La Educación Secundaria se encuentra hoy, más que nunca, ante el importante desafío de lograr la permanencia de los adolescentes y jóvenes en las escuelas, para así posibilitar su egreso, con la construcción de competencias imprescindibles para ejercer su ciudadanía, para incorporarse al mundo del trabajo y para continuar estudios superiores.

Si se atiende a los propósitos de la enseñanza en la provincia de Entre Ríos "En ese sentido, estará habilitado para desarrollar sus propios proyectos con autonomía, continuar aprendiendo y evaluando sus logros, procesos, dificultades; autonomía que no excluye la posibilidad de integrar equipos de trabajo que requieran múltiples relaciones e intercambios" (Lineamientos CGE 2009), es de esperar que el futuro ingresante universitario no demore su aprendizaje por escollos que podrían surgir del hecho de no haber adquirido las nociones básicas para afrontar esta nueva etapa. Pero la realidad presente en las aulas universitarias reclama de manera casi sistemática, volver hacia atrás para recuperar saberes que debían aprehenderse en los estudios anteriores.

A partir de este soporte, se pretende aportar algunas estrategias disciplinares y metodológicas para el aprendizaje y fundamentalmente la enseñanza de Matemática, a través del abordaje del análisis de propuestas concretas diseñadas para el trabajo en el aula en el ciclo orientado, con miras a favorecer el ingreso y la permanencia a la Universidad, específicamente en aquellas carreras inherentes a las ciencias exactas y naturales.

La matemática en la escuela secundaria: optimización del tiempo compartido

La Ley de Educación Nacional Nº 26.206 establece que la escuela secundaria "debe habilitar a los adolescentes y jóvenes para el ejercicio pleno de la ciudadanía, para el trabajo y para la continuación de los estudios". Por este motivo, resulta oportuno pensar una instancia de articulación entre este nivel educativo y la universidad.

Con frecuencia los ingresantes a carreras de nivel superior manifiestan dificultades en la comprensión de contenidos básicos de la ciencia matemática. En relación a esto, desde hace unos años a la fecha, desde la Secretaría Académica del Rectorado de UADER hemos venido trabajando a través del "Programa de Tutorías" en el acompañamiento a los estudiantes, a fin de contenerlos durante el primer año, sobre todo en las carreras científicas y técnicas[1].

Para esta universidad es posible trazar un puente para que los alumnos se inserten en el ámbito universitario con nuevas estrategias y competencias. Por esto, se afirma que el trabajo pedagógico inter-niveles e interdisciplinario permite desarrollar una visión integral de la formación y promueve el desarrollo de competencias transversales que facilitan a los alumnos traspasar de nivel educativo.

Hoy desde UADER se pretende aportar otro soporte a las políticas educativas existentes para estrechar la vinculación de estos niveles del sistema educativo, promover el acceso democrático a la universidad, garantizar la inclusión y optimizar las prácticas pedagógicas que profundicen los contenidos teóricos de los distintos niveles.

La idea de desarrollar un dispositivo de acompañamiento que signifique un aporte en el desarrollo y evaluación de la enseñanza de la matemática al interior de las escuelas secundarias de nuestra provincia, surge en el marco del "Proyecto de Mejora de la Formación en Ciencias Exactas y Naturales en la Escuela Secundaria" impulsado desde la Secretaría de Políticas Universitarias de la Nación, con el objetivo de mejorar la enseñanza de las ciencias exactas y naturales.

1 Cuando se hace alusión a carreras científicas y técnicas, se hace referencia a las carreras priorizadas mediante la declaración de Carreras Prioritarias y la creación del Programa Nacional de Becas Bicentenario para carreras Científicas y Técnicas y el plan estratégico de Formación de Ingenieros 2012-2016, carreras éstas consideradas estratégicas para el desarrollo económico y productivo del país.

Criterios de selección de contenidos y organización del material

¿Cómo crear contextos adecuados para poder enseñar matematizando? (...) Necesitamos problemas matemáticos que tengan un contexto significativo para los estudiantes.

H. Freudenthal

Organización del material

A partir de este material se pretende ofrecer un complemento para las clases de Matemática en el ciclo orientado de la educación secundaria, por este motivo se presentan, por un lado, la explicación de las propuesta y por otro, algunas sugerencias para la gestión de la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos que los autores han considerado importantes a la hora de comenzar carreras de grado y pregrado.

Las actividades que se presentan en cada apartado del Cuaderno de Matemática no constituyen unidades o secuencias didácticas organizadas en función del desarrollo exhaustivo de los contenidos del último año de la Escuela Secundaria. Se trata de una selección tendiente a profundizar los niveles de argumentación, sobre aquellos contenidos relevantes para la universidad. Se trata de un recorte que puede ser incorporado total o parcialmente a la hora de desarrollar los temas planificados. Ofrece explicaciones sobre los temas seleccionados, desarrollo de ejemplos, propuesta de trabajos prácticos, entre otros recursos que pueden ser de mucha utilidad.

En otras palabras, las actividades de cada tema, podrían formar parte de secuencias más extensas diseñadas por el propio docente o también anteceder al desarrollo de alguna temática particular o utilizarse a modo de cierre de una unidad de trabajo.

Criterios de selección de los contenidos

Al momento de seleccionar los contenidos y su tratamiento a lo largo del cuaderno, se tuvieron en cuenta aquellos temas prioritarios para el ingreso a la universidad y además los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP) aprobados por el Consejo Federal de Educación y los ejes mencionados en el diseño curricular del Consejo General de Educación de la Provincia de Entre Ríos, como por ejemplo: operaciones, geometría y medida, álgebra, funciones y probabilidad y estadística.

Algunos contenidos se encuentran desarrollados dialécticamente, de forma espiralada, considerando la complejidad, la amplitud y la profundidad que conllevan. En todos los casos se pretende aportar a la generación de un puente entre el egreso del secundario y el ingreso y permanencia en la universidad.

Se seleccionaron contenidos tendientes a generar aquellas competencias necesarias para el ingreso a la Universidad, tales como:

- Reconocer y utilizar los números reales comprendiendo las propiedades que los definen y las distintas formas de representación. Seleccionar las propiedades adecuadas en función de la situación problemática a resolver.

- Reconocer y utilizar los diferentes conjuntos numéricos en las distintas situaciones de cálculo presentadas, comprendiendo las propiedades que los definen y las formas alternativas de representación de sus elementos. Seleccionándolas en función de la situación a resolver.

- Resolver situaciones utilizando expresiones algebraicas: ecuaciones de primer y segundo grado con una sola incógnita, inecuaciones con una incógnita, sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, desde el planteamiento, resolución y verificación de soluciones.

- Resolver situaciones problemáticas utilizando el método de modelización algebraica consistente en la elección del modelo algebraico adecuado: ecuaciones e inecuaciones, el planteamiento del problema, la resolución del modelo algebraico (ecuación, inecuación o sistema), la verificación de las soluciones y la posterior discusión de los resultados.

- Identificar, definir, graficar, describir e interpretar funciones polinómicas de primer y segundo grado y funciones trascendentes: logarítmica y exponencial.

Organización y desarrollo

El objetivo de la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria es que los alumnos desarrollen el pensamiento lógico-formal, con vistas a una mirada abierta para interpretar la sociedad.

Con este propósito cada docente ha de proponer actividades matemáticas orientadas a generar respuestas ingeniosas a distintas situaciones problemáticas utilizando los contenidos abordados.

Para este apartado se toma como punto de partida un interrogante clave:

¿Cómo afecta el desempeño de los profesores en el aula, a la motivación que tienen los estudiantes, y particularmente al interés para aprender? (Bono, 2010). Para ello, la motivación se sigue considerando como un recurso importante para favorecer o restringir el proceso de aprendizaje (Pintrich, 2006).

Resolución de situaciones problemáticas

Resulta interesante pensar la enseñanza de la matemática como un recurso del cual los alumnos puedan beneficiarse para reflexionar, decidir y actuar lo mejor posible en su vida cotidiana. Actuar a nivel personal, social y profesional tanto en el presente inevitable como en el futuro previsible. Para esto, será preciso combinar bien lo que son los referentes reales y lo que es poner en juego las estrategias de resolución.

Así, al momento de elaborar situaciones problemáticas significativas en matemática, y considerando la gran variedad de textos en la temática, es importante contemplar los ítems en adelante mencionados:

- Promover el desarrollo de estrategias que favorezcan una educación participativa, autónoma, y comprometida.

- Presentar al estudiante una situación que lo movilice para la acción.

- Promover la puesta en juego de conceptos, procedimientos o actitudes que puedan ser utilizadas en otras actividades similares.

- La institucionalización de los conocimientos comienza con los estudiantes cuando el docente legitima sus procesos y, junto a ellos, generaliza, enmarca en una teoría y descontextualiza el saber aprendido.

Situación didáctica y tratamiento del error

Un sistema didáctico es "un conjunto de relaciones establecidas explícita y (o) implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que puede comprender instrumentos u objetos diversos) y un sistema educativo con el fin de que esos alumnos hagan suyo un saber constituido o en vías de constitución".(Brousseau, 1980, p. 11-57, vol. 1.1) En otras palabras, una situación didáctica describe las relaciones correspondientes de un grupo de sujetos que aprende con otro que enseña y donde interviene un medio intencionalmente diseñado para que el grupo adquiera un saber determinado.

Muchas veces, se pretende comprometer a los alumnos en su propio aprendizaje, pero este fin puede verse vedado por las reinantes clases expositivas que usualmente juegan en contra de este propósito.

Educar matemáticamente implica necesariamente un gran compromiso en la planificación de las tareas a desarrollar en el aula, buscando el modo de ubicar al estudiante en un rol activo. Por esto, es preciso establecer un clima de confianza en su capacidad y de respeto por la producción grupal.

Hay que recordar que el conocimiento no se recibe pasivamente, ni a través de los sentidos, ni por medio de la comunicación, sino que es construido activamente por el sujeto cognoscente. (Von Glasersfeld, 1996).

La interacción entre los actores de la situación didáctica, se establecerá de manera tal que sistemáticamente el estudiante se verá en la necesidad de modificar las estrategias de resolución y en consecuencia el conocimiento al que arribará en cada nueva situación problemática previamente establecida en la secuencia didáctica.

El rol activo atribuido al estudiante facilitará al docente la posibilidad de reconocer los errores específicos que ellos cometen, los que se convertirán en insumo para el tratamiento de las dificultades que requieren un mayor esfuerzo para su recuperación.

En este sentido, debemos reconocer el valor positivo de los errores en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática. "Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos." (Rico, 1998, p. 76).

Orientaciones para la Evaluación

La evaluación es un proceso formativo al servicio de los aprendizajes (Gil y Sanmartí, 1994) y debe ser percibida por los estudiantes como una herramienta de acompañamiento real, que genere expectativas positivas y donde los inconvenientes se utilicen para detectar carencias, aceptando los errores como momentos necesarios en el proceso de construcción del conocimiento.

Es de suma importancia devolver corregidas las actividades evaluativas a los estudiantes no mucho tiempo después de realizada, remarcar las respuestas correctas, las incorrectas y las no realizadas; dedicar un tiempo posterior a las devoluciones para favorecer la autoevaluación de los estudiantes.

Otra alternativa es rehacer las evaluaciones en clase (evolución continua) o como trabajo extra áulico (trabajos propuestos por el docente), grupales o individuales utilizando sus apuntes como herramienta que facilite su resolución; así también la organización de clases de revisión de temas que presentan reiteradas dificultades.

La evaluación es un proceso continuo que implica todas las actividades que el docente propone en el recorrido didáctico. Es el proceso de aprendizaje, involucrando la asimilación de conceptos nuevos y la aplicación de los mismos en situaciones problemáticas. Esto implica evaluar que el estudiante, una vez realizada la operatoria necesaria, tenga la capacidad de contextualizar los resultados obtenidos para construir respuestas coherentes a la situación planteada; así como también explicitar los procedimientos elegidos para la resolución de un problema, mediante el uso del lenguaje matemático.

La evaluación en matemática supone evaluar la capacidad de explicar y justificar los procedimientos mediante el uso del lenguaje matemático en sus diferentes variantes (coloquial, gráfico, simbólico) y la producción de un registro que permita comunicar los resultados de manera eficaz.

Es así que la evaluación es un proceso que manifiesta a docentes y estudiantes elementos para conocer el estado de situación de la enseñanza y del aprendizaje que realizan juntos; como tal, representa una oportunidad de diálogo entre ambos. Por lo que el momento de la devolución de las evaluaciones escritas debe prever atención personalizada a los estudiantes y los errores cometidos. Los resultados de las evaluaciones y las observaciones de los errores detectados con mayor frecuencia permiten al docente reorientar el proceso de enseñanza y planificar la tarea futura, como así también dedicar un tiempo a la posibilidad de análisis de diferentes modos de resolución de un mismo problema. En muchas situaciones, podemos encontrar diferentes estrategias por los cuales se aborda a un mismo resultado y es significativo ponerlo de manifiesto.

Es relevante que los alumnos entiendan con claridad los objetivos que se espera que logren en relación al contenido evaluado. La calificación final de una evaluación es el resultado que se aprecia entre los objetivos esperados y los logrados, pero en ocasiones es difícil para los estudiantes darse cuenta de lo que el profesor considera importante a la hora de corregir. Por esto es indispensable que el docente explicite este tipo de cuestiones aunque las considere triviales.

Resulta significativo que se evalúe cuáles son los progresos de los jóvenes en relación con los conocimientos matemáticos evaluados y se les informe sobre lo que se espera que mejoren. Esto contribuye a la construcción del oficio de la matemática (SADOVSKY 2005). En este sentido, el docente debe llevar registros personalizados de los progresos de los alumnos y considerar, como un punto más a la hora de calificar, la distancia entre sus construcciones y los saberes matemáticos.

Cuando el docente califique a los alumnos, además de ponderar el estado de situación de cada uno de ellos, debe tener en cuenta el propio proceso de enseñanza de la materia y contemplar la distancia entre lo planificado y lo efectivamente realizado.

Módulo N° 1

Números reales. Subconjuntos. Operaciones, orden, potenciación y radicación. Exponentes fraccionarios. Valor absoluto. Intervalos y la recta real

¿Por qué estudiar conjuntos numéricos?

El desarrollo de los campos numéricos continúa en la educación secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes.

Los números como expresión de cantidades y las operaciones como expresión de relaciones o transformaciones entre esas cantidades, representan un medio necesario para resolver problemas reales. Estos problemas juegan un papel integrador entre los distintos campos numéricos, de los naturales a los complejos y la combinación de operaciones emergentes en el camino que conduce a la solución de una situación determinada y del uso de propiedades que simplifiquen el cálculo.

Es necesario poner a los jóvenes y adolescentes en situaciones que les permitan poco a poco, utilizar las herramientas conceptuales previas que poseen y avanzar en la construcción de un conocimiento nuevo que podrán utilizar, posteriormente, en la resolución de problemas de otros contextos. De este modo, el tratamiento de las operaciones y sus propiedades surge naturalmente y significa poder analizarlos y explicitarlos, reconocer modelos que otorguen distintos significados a las operaciones, producir cálculos que combinen varias operaciones, evaluar la razonabilidad de los resultados obtenidos, explicitar las propiedades de las operaciones, elegir el tipo de cálculo que resulte más conveniente (mental, exacto, aproximado o con calculadora).

Se priorizará el trabajo sobre el cálculo mental, la estimación, la producción de estrategias particulares de cálculo y el uso de la calculadora como medios para hacer que los estudiantes pongan en funcionamiento las propiedades de las operaciones y produzcan argumentos que validen sus producciones.

El trabajo sobre los conjuntos numéricos contemplará la reflexión sobre las relaciones entre los elementos que componen cada una de las operaciones.

Proponemos como objetivos:

- Explorar, analizar y explicar relaciones y propiedades (de las operaciones, de los criterios de divisibilidad, de la conformación de números, etc.).
- Reconocer y usar los distintos campos numéricos en problemas tanto de contextos intramatemáticos como relacionados a otras ciencias.
- Reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas.
- Incorporar hábitos y actitudes propios de la actividad matemática.
- Reconocer el papel de los recursos en el propio aprendizaje.

Las situaciones de enseñanza deberían posibilitar una sucesión de acciones de modo de poder identificar y usar las propiedades de los distintos conjuntos numéricos, así como de las operaciones que se realizan en él. Utilizar recursos algebraicos para decidir sobre la validez de propiedades numéricas y para producir, formular y validar conjeturas relativas a los números naturales, enteros, racionales y reales, considerando el sentido que adquiere cada uno de ellos y las regularidades que es posible establecer.

Números reales y sus subconjuntos

Presentamos los subconjuntos numéricos de los números reales:

- Naturales: $N = \{1,2,3,..........\}$
- Naturales ampliados: $N_0 = N \cup \{0\} = \{0,1,2,3,..........\}$
- Enteros: Aquí se agregan los números enteros negativos que son los de la forma –n, con n$\in N$, luego $Z = \{.......,-3,-2,-1,0,1,2,3,..........\}$
- Racionales: $Q = \left\{ \frac{a}{b}, a \in Z \wedge b \in N \right\}$

  Observar que estos pueden aparecer expresados en su forma decimal por ejemplo: $\frac{1}{2}$ puede ser expresado como 0,5. Todo número racional tiene una cantidad finita de cifras decimales, o bien un número infinito de cifras decimales periódicas. Por ejemplo: $\frac{1}{3}$ = 0,33333...

- Irracionales (I): Son los números que tienen una cantidad infinita de cifras decimales NO periódicas, por ejemplo: $\pi, \sqrt{2}, e, etc.$ Luego $N \subset N_0 \subset Z \subset Q$

El conjunto de los números reales como: $R = Q \cup I$

Operaciones con números reales

Propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales (R): *Si a, b, c y d son números reales con d distinto de cero. Luego tenemos las siguientes propiedades:*

Para la adición (+)

- **Ley de cierre:** a + b es un nro. real.
- **Propiedad conmutativa:** a + b = b + a.
- **Propiedad asociativa:** a + (b + c) = (a + b) +c.
- **Existencia de elemento neutro para la suma:** a + 0 = a.
- **Existencia del opuesto:** a + (-a) = 0; -a es el opuesto de a.

Para la multiplicación (.)

- **Ley de cierre:** a . b es un número real.
- **Propiedad conmutativa:** a . b = b . a .
- **Propiedad asociativa:** a. (b . c) = (a . b) . c .
- **Existencia del elemento neutro para el producto:** a . 1 = a .
- Inverso multiplicativo o recíproco: si d es distinto de cero existe d^{-1} tal que: d . d^{-1} = 1; d^{-1} es el inverso multiplicativo de a (recordar $d^{-1} = \frac{1}{d}$).

Observación

El inverso multiplicativo sólo existe para d distinto de cero (ya que la división $\frac{a}{0}$ o a: 0 no existe o más precisamente no está definida).

Ambos: el inverso aditivo y el multiplicativo (este último en caso de existir) **son únicos**.

Hay una propiedad que relaciona el producto con la suma que se llama **propiedad distributiva**:

a.(b+c) = a.b + a.c . También: (a+b).c = a.c + b.c .

Propiedad absorsiva: a.0 = 0.a = 0 Es decir que el producto de cualquier número real por el cero es = a cero.

Multiplicación de un real por el -1: (-1).a = -a .

Es decir que si multiplico un número real por el -1 obtengo su elemento opuesto.

Observación

Observar que a todas las propiedades las enunciamos solo para la suma y el producto, esto se debe a que matemáticamente solo hace falta para la construcción de los números reales esas dos operaciones, ya que podemos definir las otras dos como se muestra a continuación:

Resta: a - b = a + (-b) (es decir que la resta de a menos b se define como la suma de a + el elemento opuesto de b).

División: a : d = $\frac{a}{d}$ = a . d^{-1}, con d distinto de cero (es decir que definimos la división de a dividido d, con d distinto de cero, como el producto de a por el inverso multiplicativo de d).

> **Importante:** La división por cero no es posible es decir a:b o su equivalente $\frac{a}{b}$ existe si y solamente si b no es cero. Un caso particular es cuando tenemos $\frac{0}{0}$ en ese caso decimos que este cociente está indeterminado.
>
> **Recordar:** no se puede $\frac{a}{0}$.

Propiedades útiles:

- **a.b = 0 ⇔ a = 0 o b = 0 (o ambos son cero)**
- $\frac{a}{b}$ **= 0 ⇔ a = 0, y b distinto de cero**

Recordemos la regla de los signos para la multiplicación y la división

- Si multiplicamos o dividimos dos números positivos el resultado es positivo.

- Si multiplicamos o dividimos dos números uno positivo y otro negativo el resultado es negativo.

- Si multiplicamos o dividimos dos números negativos el resultado es positivo.

La división solo es distributiva cuando el factor a distribuir esta a la **derecha:**

(a+b):c = a:c + b:c o $\left(\frac{a+b}{c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

Mientras que a:(b+c) o $\left(\frac{a}{b+c}\right)$ no se puede distribuir.

Orden de los números reales
Tricotomía del orden

Si a y b son números reales cualesquiera, luego se puede dar uno y solo uno de los siguientes casos:

- $a < b$.

- $a = b$.

- $a > b$.

Ejemplos

- 0,5 <1 luego (obviamente) no puede pasar que 0,5 = 1 ni tampoco que 0,5 > 1.
- $\frac{1}{2}$ = 0,5 como se cumple la igualdad luego $\frac{1}{2}$ no puede ser ni mayor ni menor que 0,5.

Llamaremos **desigualdades** a toda expresión que esté relacionada mediante alguno de los siguientes signos: **>** ((estrictamente) mayor), **<** ((estrictamente) menor), ≥ (mayor o igual) y ≤ (menor o igual). Las desigualdades relacionadas mediante los dos primeros signos son llamadas fuertes o estrictas, mientras que las relacionadas con las dos últimas son llamadas débiles o irrestrictas.

Propiedad transitiva del orden

- Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
- Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$.
- Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$.

Ejemplo

- $1 < 1{,}87$ y $1{,}87 < 1{,}88$ entonces $1 < 1{,}88$. Si $2 = \frac{4}{2}$ y $\frac{4}{2} = \frac{8}{4}$ entonces $2 = \frac{8}{4}$. Si $4 > 2$ y $2 > (-5)$ entonces $4 > (-5)$.

Densidad de los números reales

"Entre dos números reales distintos hay un tercer número real distinto a los otros dos". Es decir, si **a** y **b** son dos números reales ($a \in R$, $b \in R$) cualesquiera, entonces existe al menos un número real **c** ($c \in R$) tal que si **a < b** entonces **a < c <b**.

Decimos entonces que el conjunto de los números reales es **denso**. Esta propiedad también es válida para los números racionales (Q) y para los irracionales, es decir entre dos números racionales distintos hay un tercer número racional distinto a los otros dos y entre dos números irracionales distintos hay un tercer número irracional distinto a los otros dos. Luego los racionales y los irracionales son densos.

Recordar que los números racionales contienen a los naturales, naturales ampliados y a los enteros pero sin embargo estos tres conjuntos no son densos: entre dos números naturales puede no haber un tercero distinto a ellos dos, al igual entre dos naturales ampliados y entre dos números enteros puede no haber un tercero distinto de ellos. Luego decimos que los naturales (N), naturales ampliados (N_0) y los enteros (Z) son discretos. En un conjunto **discreto** entre dos elementos distintos hay una cantidad finita de elementos (puede no haber ninguno), mientras que en un conjunto denso entre dos números distintos siempre hay infinitos números de este conjunto.

Los números naturales, los naturales ampliados, los enteros, los racionales, los irracionales y los reales son conjuntos infinitos, es decir poseen una cantidad infinita de elementos. Los naturales poseen primer elemento (el 1) al igual que los naturales ampliados (el 0) pero no último elemento. Los enteros, los racionales, los irracionales y los reales no poseen ni primer ni último elemento.

El conjunto de los números reales es continuo ya que es denso pero además entre dos números reales distintos solo hay números reales.

Ejemplos

Entre 1 y 1,1 tenemos los números racionales 1,01; 1,02; 1,001; etc. Entre 1,4 y 2 tenemos los números reales 1,41; 1,414; $\sqrt{2}$; etc. Entre 1 y 2 no hay ningún natural distinto de 1 y 2. Entre -1 y 0 no hay ningún entero distinto de -1 y 0. Entre el número π (3,1415...) y el número 3,14 tenemos el número 3,1.

ACTIVIDAD

Densidad en el conjunto de los números racionales e irracionales

Objetivo: lograr que el alumno comprenda el concepto de densidad en el conjunto de los números racionales, irracionales y reales

Elementos de trabajo: calculadora, papel y lápiz.

Organización: armar grupos de entre tres y cinco alumnos.

Tiempo: 60 minutos aproximadamente. Distribuidos en dos clases en una primera 40 minutos y en la otra 20 min.

Consigna

Hacer que el alumno elija dos números cualesquiera racionales distintos, a modo de ejemplo tomemos 0,1 y 0,5. Luego se les pide que den 10 números racionales mayores que el menor elegido y menores que el mayor. Consultarles cómo los obtendrían. Ver las distintas opciones. ¿Serían aplicables las técnicas sugeridas si en lugar de pedirles 10 números les pedirían 100, 1000, etc.?

Una técnica sugerida podría ser tomar a_0 = *menor de los números elegidos*, a_1 = *al mayor*, para nuestro ejemplo sería a_0 =0,1 y a_1 =0,5, luego el primer número elegido podría ser $n_1 = (a_0 + a_1)/2$, luego $n_2 = (a_0 + n_1)/2$, ..., $n_{10} = (a_0 + n_9)/2$, entonces obtendríamos:

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
0,3	0,2	0,15	0,125	0,1125	0,10625	0,103125	0,1015625	0,10078125	0,100390625

Claramente estos números satisfacen lo solicitado, ¿por qué? ¿Se podría haber construido de otra forma?

Una alternativa sería hacer:

$n_1 = (a_0 + a_1)/2$, luego $n_2 = (b_0 + n_1)/2$, ..., $n_{10} = (b_0+n_9)/2$ con lo cual obtendríamos.

n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}
0,3	0,4	0,45	0,475	0,4875	0,49375	0,496875	0,4984375	0,49921875	0,499609375

El docente puede mencionar, sin entrar en detalle el término "sucesión de números racionales".

1. Repetir lo anterior eligiendo ahora dos números irracionales, se podrían elegir por ejemplo $a_0 = \sqrt{2}$ y $a_1 = \sqrt{3}$. Observar que ahora la sucesión que se obtendría serían números irracionales.
2. Para que el alumno piense en su casa: ¿Qué pasaría si elijo un número racional y uno irracional? Debatir luego en la clase siguiente, compartir conclusiones.

ACTIVIDAD

Potenciación
Potenciación de exponentes naturales y enteros

Definimos la potenciación de la siguiente manera sea **a** un número real ($a \in R$) llamado **base** y **n** un número natural ($n \in N$) llamado **exponente** entonces: $\mathbf{a^n = a.a.a.a \ldots a}$ n factores.

Ejemplos

- $2^4 = 2.2.2.2 = 16$.
- $(2,5)^2 = 2,5 \, . \, 2,5 = 6,25$.
- $(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$
- $1^5 = 1.1.1.1.1 = 1$.

Importante: La potencia de exponente par de cualquier número real distinto de cero es siempre mayor que cero.
La potencia de exponente impar de un número mayor que cero es siempre mayor que cero.
La potencia de exponente impar de un número real menor que cero es siempre menor que cero.

Observación

Para cualquier número real a distinto de cero ($a \in R$, $a \neq 0$) tenemos que **$a^0 = 1$**. Es decir que "cualquier número real, distinto de cero, elevado a la cero da uno".

No es cierto para **a = 0,** es decir **$0^0 \neq 1$**, de hecho 0^0 es una indeterminación (no se puede calcular).

Propiedades de la potenciación natural

Sean $a \in R$, $b \in R$, $n \in N$, $m \in N$.

1. Producto de potencias de igual base:

$$a^n . a^m = a^{n+m} .$$

2. La potencia es distributiva respecto del producto y del cociente:

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

$(a : b)^n = a^n : b^n$ o $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, con $b \neq 0$.

3. Potencia de potencia:

$$(a^n)^m = a^{n.m} .$$

Potenciación entera

1. Potencias negativas:

Si $a \neq 0$ entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$. En particular $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

2. Cociente de potencias de igual base:

Si $a \neq 0$ entonces $a^m : b^n = \frac{a^m}{b^n} = a^{m-n}$

Importante: La potenciación no es distributiva respecto de la suma (ni de la resta).
No es cierto: $(a + b)^n = a^n + b^n$
$(a - b)^n = a^n - b^n$

Radicación
Radicación de índice natural

Definimos la raíz n-ésima con el índice (natural) $n \geq 2$, del número real a (radicando), de la siguiente manera: $\sqrt[n]{a}$ = c ⇔ (si y solo si) c n = a. Luego el número real c es la raíz n-ésima de a.

La raíz n-ésima de un **número negativo** existe, en el conjunto de los números reales, si y solo si n es un número **impar.** La raíz n-ésima de un número **no** negativo (positivo o cero) existe **cualquiera** sea el índice (par o impar).

Propiedades de la radicación

Sean m y n dos números naturales con $n \geq 2$ y $m \geq 2$, a y b dos números reales cualesquiera.

1. **Si n es un número par y** $\sqrt[n]{a}$**= c** entonces **–c** también es una raiz n-ésima de a. Es decir si n es par entonces = ± *c* (donde $c^n = (-c)^n = a$, recordar que la potencia de exponente par de cualquier número real, distinto de cero, es siempre positiva).

2. **La radicación es distributiva respecto del producto:**

   $$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

3. **La radicación es distributiva respecto del cociente:**

   $$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \text{ o } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ si } b \neq 0$$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

5. **Si existe** $\sqrt[n]{a}$ **entonces:** $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

> Importante: La radicación no es distributiva respecto de la suma (ni de la resta).
> No es cierto: $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.
> $\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

Exponente fraccionario

Cuando tenemos potencias y raíces es conveniente y más práctico trabajar con exponentes fraccionarios y los definimos de la siguiente manera: **Si** $\sqrt[n]{a^m}$ **existe** (recordar que si ***n*** es par ***a*** debe ser no negativo).

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$

Los exponentes fraccionarios cumplen con todas las propiedades de los exponentes naturales.

Observación

Siempre $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ **= *a* .**

- Mientras que $\sqrt[n]{a^n}$ **= *a* si n es impar y** $\sqrt[n]{a^n}$ **= | *a* | si n es par**.

Ejemplos

- 21/2= 2 .
- (-5) 3/5= 5-53
- a$^{1/n}$ = $\sqrt[n]{a}$ (Cualquier raíz pude ser escrita como una potencia de exponente fraccionario).
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3/2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$

Valor absoluto de un número real

Sea x un número real, definimos el valor absoluto del mismo como:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

- | a + b | ≤ | a | +| b |.
- | a – b | ≥ | a | - | b |.
- | a . b | = | a | . | b |.
- Si b ≠ 0 => | a : b | = | a | : | b |.

Observación

Para todo número real.

- Si n es par $\sqrt[n]{a^n} = |a|$. Ej: $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$
- Si n es impar $\sqrt[n]{a^n} = a$. Ej: $\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$

Intervalos y la recta real

Los intervalos son subconjuntos de los reales (es decir conjuntos dentro del conjunto de los números reales) de la siguiente forma:

Intervalos acotados

- Intervalo abierto (a,b) = { x ∈ R / a< x <b }, el intervalo no incluye los extremos, o sea los números reales a ∧ b.
- Intervalo cerrado [a,b] = { x ∈ R / a ≤ x ≤b }, el intervalo incluye los extremos, o sea los números reales a ∧ b.
- Intervalo semi-abierto o semi-cerrado:
- [a,b) = { x ∈ R / a ≤ x < b }, a∈[a,b) pero b∉[a,b) .
- (a,b] = { x ∈ R / a < x ≤ b }, a∉[a,b) pero b∈[a,b) .

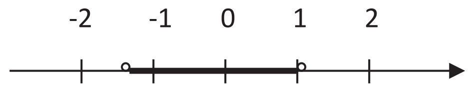
Intervalos no acotados y R

- [a,∞) = { x ∈ R / x ≥ a}.
- (a,∞) = { x ∈ R / x > a}.
- (-∞, a] = { x ∈ R / x ≤ a}.
- (-∞, a) = { x ∈ R / x < a}.

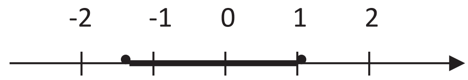
(-∞,∞) = { x ∈ R }= R (es decir es todo el conjunto de los reales).

Antes habíamos visto que el conjunto de los números reales es denso. Otra propiedad de los mismos es que son completos, es decir que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real y que a cada número real le corresponde un punto en la recta.

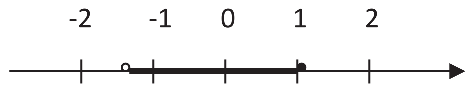
Ejemplos de representaciones de intervalos en la recta numérica



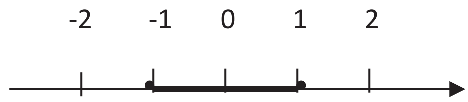
$(-\frac{4}{3}; 1)$



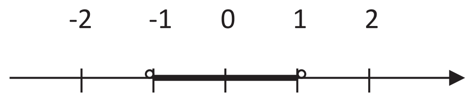
$[-\frac{4}{3}; 1]$



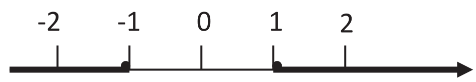
$(-\frac{4}{3}; 1]$



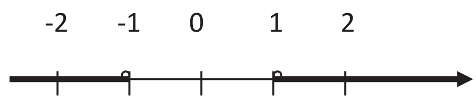
$|x| \leq 1$



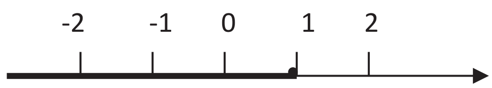
$|x| < 1$



$|x| \geq 1$



$|x| > 1$



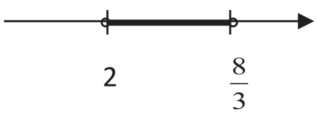
$(-\infty; 1]$

1. Decir si las siguientes propuestas son verdaderas o falsas y justificar:

1. $(2 + 5)^2 = 2^2 + 5^2$
2. $(4 : 2)^2 = 4^2 : 2^2$
3. $(3.5)^3 = 4^3 . 2^3$
4. (2 - 5) es un número natural.
5. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
6. $(4. n . p)^4 = 256. n^4 . p^4$
7. $(3. m^3. n^2)^2 = 9. m^6. n^4$
8. 8.a.b.c : 2.a.c = 4.b
9. $(3^3)^2 : 3^3 = 3^3$
10. $(3^3)^2 . 3^3 = 3^2$
11. 36 + 64= 6 + 8
12. $\sqrt{36+64} = 10$
13. $\sqrt{\dfrac{a}{2a}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$
14. $4^0 = 4$
15. $(((5)^2)^0)^3 = 1$
16. 3 . (2+4) = 3 . 2 + 3 . 4
17. 10: (3 + 2) = 2

2. Completar:

1. [2; 3] = {.......................................}
2. $(\frac{2}{3}; 8]$ = {....................................}
3. (-3; 0) = {......................................}
4. [0; 2) = {.......................................}
5. .... = {x ∊ R / 3 ≤ x <7}
6. .... = {x ∊ R / 1,3< x ≤1}
7. .... = {.....................................}



3. Representar en la recta numérica los siguientes intervalos:

a. [a;+ ∞)
b. (-∞; a)
c. (-∞; a]
d. (-∞;+∞)

ACTIVIDADES

4. Expresar en forma de intervalos los siguientes conjuntos:

   a. $A = \{x \in R \,/\, |x| \leq 5\}$ = ...

   b. $B = \{x \in R \,/\, |x| < 3\}$= ....

Sugerencia: Recordar que $|x| < a$, con $a > 0$,se puede escribir como $-a < x < a$.
De manera análoga $|x| \leq a$, con $a \geq 0$, se puede escribir como $-a \leq x \leq a$.

5. Expresar los siguientes conjuntos como unión de intervalos:

   a. $A = \{x \in R \,/\, |x| \geq 1\}$ = ...

   b. $B = \{x \in R \,/\, |x| > 7\}$ = ...

   c. $C = \{x \in R \,/\, |x + 2| \geq 2\}$ = ...

   d. $D = \{x \in R \,/\, |x - 5| \geq \frac{3}{2}\}$ = ...

6. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

   a. $A = \{x \in R \,/\, |x| < 1\}$

   b. $B = \{x \in R \,/\, |3 + 3x| > 2\}$

   c. $C = \{x \in R \,/\, \left|\frac{2x-5}{3}\right| \geq 1\}$

   d. $D = \{x \in R \,/\, \left|\frac{x}{5} - 2\right| > \frac{1}{2}\}$

Módulo N° 2

Funciones: función lineal, función cuadrática, exponencial y logarítmica

¿Por qué estudiar funciones?

En los diseños curriculares provinciales se aprecia una constante preocupación por que los alumnos adquieran los conocimientos necesarios para desenvolverse como ciudadanos capaces de ejercer sus derechos y deberes en una sociedad que incorpora cada vez más a su funcionamiento, a sus actividades y a sus lenguajes ciertos aspectos matemáticos.

Esta unidad tiene como objetivo introducir la noción de funciones y presentar algunas de ellas mostrando su utilidad para modelar situaciones reales, sociales o naturales, destacando la información que un análisis del comportamiento de las mismas puede brindar.

Específicamente en el mundo actual, todos nos enfrentamos a situaciones de la vida cotidiana, que requieren el manejo de las relaciones que se dan entre distintas variables. Un ejemplo de esto puede ser: calcular el costo de la energía eléctrica de nuestro hogar. El monto que pagamos por el uso de esta energía es una función que depende del consumo.

Nos proponemos como objetivos:

- Utilizar modelos funcionales para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de la realidad.
- Comprender e interpretar distintas formas de expresión matemática e incorporarlas al lenguaje y a los modos de argumentación habituales.
- Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, resolverlos y analizar resultados utilizando recursos apropiados.
- Reflexionar sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas.
- Incorporar hábitos y actitudes propios de la actividad matemática.
- Reconocer el papel de los recursos en el propio aprendizaje.

Los contenidos están relacionados con la unidad de números y con el lenguaje algebraico. Las funciones lineales aparecen en situaciones de proporcionalidad, de costos y de cantidades a precio fijo; las cuadráticas, muchas veces aparecen por acumulación de efectos lineales (así ocurre en el espacio recorrido por un cuerpo en caída libre); la función exponencial caracteriza muchos procesos de crecimiento proporcional (evolución de precios, demografía); la de proporcionalidad inversa se emplea en la descripción de innumerables procesos físicos o geométricos; el comportamiento recurrente de muchos fenómenos, tales como la temperatura o ciertos fenómenos eléctricos, da lugar a funciones periódicas.

El desarrollo y adquisición de los conceptos de este eje supone el conocimiento de la idea de función, lectura, descripción e interpretación de tablas y gráficas, representación gráfica de funciones, y estudio a partir de la fórmula desarrollado en los cursos anteriores. Se necesita además de una adecuada utilización de los números y el manejo del lenguaje algebraico.

Sugerencias

El uso de herramientas informáticas, como *geogebra*, *silab*, u otro software matemático libre (que pueden disponer en netbooks o celulares), se constituye en un medio eficaz para la apropiación de las funciones como objeto de estudio, analizando dominio, imagen, raíces y comportamiento en general, a partir de un diálogo permanente entre distintos tipos de registros (gráficas, tablas, fórmulas, enunciados). Las propuestas de enseñanza deberían posibilitar o promover una sucesión de acciones que muestren el corazón del trabajo matemático en el aula, en el que cobre importancia reconocer y usar funciones polinómicas (con mayor énfasis en las funciones afín y cuadrática) y utilizar modelos funcionales en la resolución de problemas que se aproximen a situaciones reales. Este camino, en el que se ponen de relevancia las funciones polinómicas, será el terreno propicio para el trabajo con polinomios (raíces o ceros, factorización, etc.).

Algunos símbolos que usaremos en el desarrollo del tema

- $\forall$ (Para todo)
- $\exists$ (Existe (al menos uno))
- $\in$ (Pertenece a), se usa en la relación entre elementos y conjuntos.
- / (Tal que)
- $\Leftrightarrow$ (Si y sólo si)
- $\Rightarrow$ (Implica, entonces)

- $\subset$ (Incluido en), es una relación que se da entre conjuntos.
- $\wedge$ (y)
- $\vee$ (ó)
- R^+ reales positivos.
- R^- reales negativos.
- R^+_0 reales no negativos, o sea, los positivos y el cero.

¿Qué es una función?

Una función es una relación entre dos conjuntos de modo tal que a cada elemento del primer conjunto A (dominio o conjunto de partida) le asigna uno y solo un elemento del conjunto B (codominio o conjunto de llegada). Lo simbolizamos $f : A \to B$. Se lee f de A en B.

Ejemplo

Sea *A= { 1; 2; 3} y B={1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}*

La relación *f: {asigna a cada número su cuadrado}*

Luego:

f(1)=1

f(2)=4

f(3)=9

Esta relación es una función y si llamamos x a los elementos de A podemos escribir $f(x) = x^2$

Consideraremos A y B conjuntos de números, es decir $A \subset R$ y $B \subset R$. Las funciones numéricas proporcionan, una manera de cuantificar y describir la dependencia de una variable de otra, un modelo para el estudio de aspectos del fenómeno en cuestión.

Informalmente una función es una asignación tal que por cada entrada que realizamos obtenemos una única salida.

Observación

Que esta función podría representar por ejemplo el cálculo del área de un cuadrado de lado con longitud *x*, podríamos decir que el área está en función de la longitud del lado.

Muchas veces para tomar decisiones sobre una situación que haya sido modelada por una función, interesa hacer un análisis del comportamiento de dicha función: cuándo crece, cuándo decrece, cuán rápido lo hace, dónde toma sus valores extremos, etc.

La segunda parte de este curso está orientado a estudiar cómo se hace este tipo de estudio de funciones, y esta unidad en particular, propone ese análisis para las funciones cuando se conoce su gráfico.

Veremos ahora los conceptos de dominio, imagen y gráfico de una función.

Sea *f* la función y *x* la variable independiente.

f(x) (la imagen de x a través de la función) es la variable dependiente, ya que depende del valor de x cuando no hay posibilidad de confusión se la puede indicar con **y**.

(x, f(x)) es el conjunto de los puntos que están sobre la gráfica que representa la función. Si f es una función, tal que f: $A \rightarrow B$ diremos que:

Al mayor conjunto para la cual la función esté definida, se llamará dominio natural de la función. Siempre que no aclaremos tomaremos como dominio de la función al natural.

Aplicación de funciones en la vida real

Objetivo: lograr que el alumno comprenda, en forma intuitiva, los conceptos función, dominio e imagen a través de la presentación de un modelo matemático que represente una situación de la vida real.

Elementos de trabajo: calculadora, papel y lápiz. Opcional: netbook, celular.

Organización: armar grupos de entre tres y cinco alumnos luego de haber visto los conceptos anteriores.

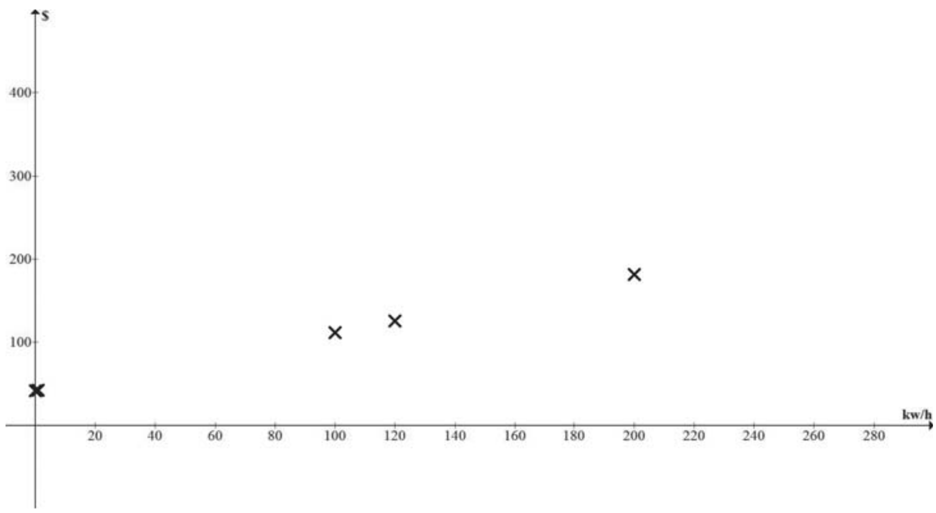
Tiempo: 30 minutos aproximadamente. Se prevé la utilización este tiempo de la clase.

Consigna:

- Presentación de la actividad: El costo de electricidad en octubre de 2016 de la ciudad de Paraná para los clientes que consumen hasta 200kw/h (kilowatts hora), sin impuestos, se calcula según un cargo fijo de $41,62 y un cargo variable, que depende del consumo, de $0,6986 por kw/h.

- Pedirles a los alumnos que calculen cual sería el costo de consumir 0kw/h, 1kw/h, 100 kw/h, 120kw/h y 200kw/h. Luego que grafiquen los resultados ¿qué observan?

Posible respuesta: los alumnos pueden realizar los siguientes cálculos: para 0 kw/h el costo sería $41,62+0*$0,6986=$41,62; para 1kw/h $41,62+1*$0,6986=$42,3186; analogamente para 100 kw/h $41,62+100*$0,6986=$111,48. Entonces para 120 kw/h sería $125,452 y 200 kw/h $181,34. En caso de disponer de un graficador lo pueden utilizar para representar los datos. Sino también con lápiz y papel se puede realizar.



- Consultar a los alumnos ¿qué observan? Notar que los puntos se distribuyen sobre una recta (el costo es una función lineal).

- Luego, el docente puede preguntar, "¿se animan a dar una expresión que permita calcular el costo para cualquier consumo *x*, para un consumo de hasta 200kw/h?"

Posible respuesta: El costo para cualquier consumo sería
c(x)= $41,62+x*$0,6986

- En relación a la propuesta anterior, ¿Es una función? ¿Cuáles serían los valores para los que está definida?

- Posible respuesta: $0kw/h \leq x \leq 200kw/h$, o en forma de intervalo

- [0 ,200]. Este sería el dominio de la función.

- ¿Cuáles son los valores mínimo y máximo que puede tomar el costo?

Posible respuesta: $0 y $181,34 respectivamente (observar que el conjunto imagen sería [0 ; 181,34]).

- Preguntar si a los alumnos se les ocurren otras situaciones que se puedan modelar utilizando funciones.

Dominio, codominio e imagen

- El *dominio* de f, que llamaremos A, es el conjunto de valores de x para los que la función está definida, se gráfica sobre el eje x. Se escribe Df.

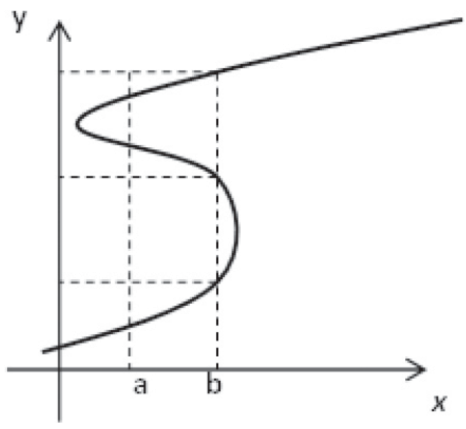
- Convenimos en llamar *codominio* al segundo conjunto (el de llegada), conjunto B, que escribiremos como Cf.

- La *imagen* de la función o conjunto imagen, que indicaremos como Im f, es el conjunto de valores que alcanza f, es decir, el conjunto cuyos elementos son las f(x), gráficamente aparece en el eje y: Im f = {es el conjunto de los y pertenecientes a B tal es que existe x perteneciente a A con f(x) = y} en símbolos $\operatorname{Im} f = \{y \in B / \exists x \wedge f(x) = y\}$. Observar que Im f $\subseteq$ Cf.

Coloquialmente, un elemento de B (codominio) está en la Imagen de la función, si es imagen de algún elemento de A (Dominio)

Una función queda determinada con la fórmula f(x), que relaciona a la variable independiente x con la dependiente y.

Veamos si la siguiente gráfica corresponde a una función cuyo dominio e imagen pertenecen a los reales.



Observamos en la gráfica que para a < *x* < b, a algunos *x* le corresponde más de un valor de y, lo que se visualiza fácilmente trazando rectas paralelas al eje de ordenadas, por lo tanto no es función.

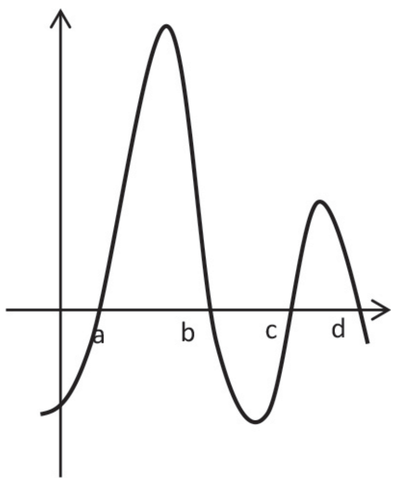
Intervalos de positividad y negatividad

Llamamos ceros de una función a los valores de x para los cuales se hace nula la misma. Es decir, si x_0 es un cero de *f(x)* entonces $f(x_0)=0$.

Sea *f(x)* una función definida en el intervalo (a,b), es decir $(a,b) \subset Df$, luego:

- Si *f(x)*>0 para todo x en (a,b), luego (a,b) es un intervalo de positividad de la función.
- Si *f(x)*<0 para todo x en (a,b), luego (a,b) es un intervalo de negatividad de la función.
- Si *f(x)*=0 para todo x en (a,b), luego (a,b) decimos que la función es nula en este intervalo.

Ejemplos

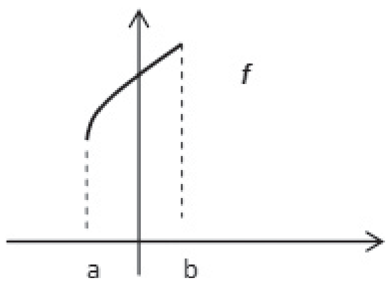


Los valores a, b, c y d son los ceros de esta función, es decir *f(x)*=0 para x igual a cada uno de estos cuatro valores (gráficamente los ceros son los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x). Luego: *f(x)*>0 para x en (a, b) y (c, d) y *f(x)* <0 para x en $(-\infty; a)$, (b; c) y $(d; +\infty)$.

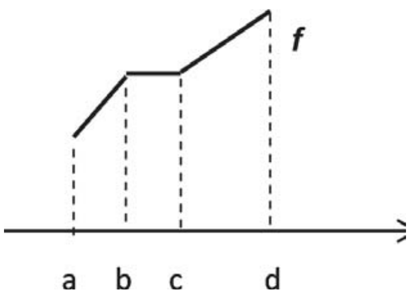
Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función

Sea f(x) una función definida en el intervalo (a; b), es decir (a; b)$\subset$ Df, luego:

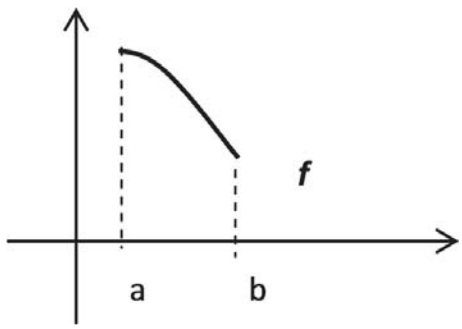
- Decimos que la función *f(x)* es <u>monótona creciente</u> si para todo $x_1 \in (a\ ,\ b)$ y $x_2 \in (a\ ,\ b)$ tales que $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Decimos que la función *f(x)* es <u>estrictamente creciente</u> si para todo $x_1 \in (a\ ,\ b)$ y $x_2 \in (a\ ,\ b)$ tales que $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) < f(x_2)$.
- Decimos que la función *f(x)* es <u>monótona decreciente</u> si para todo $x_1 \in (a\ ,\ b)$ y $x_2 (a\ ,\ b)$ tales que $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Decimos que la función *f(x)* es <u>estrictamente decreciente</u> si para todo $x_1 \in (a\ ,\ b)$ y $x_2 \in (a\ ,\ b)$ tales que $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) > f(x_2)$.
- Decimos que la función *f(x)* es <u>constante</u> si para todo $x_1 \in (a\ ,\ b)$ y $x_2 \in (a\ ,\ b)$ tales que $x_1 < x_2$ tenemos que $f(x_1) = f(x_2)$.



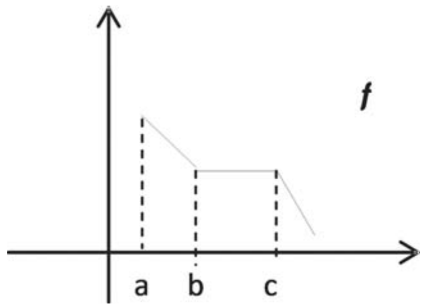
La función es estrictamente creciente en (a , b).



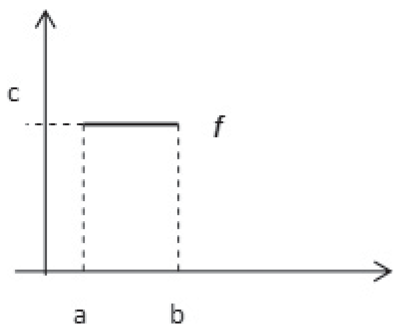
La función es monótona creciente en (a , b) pero no estrictamente creciente; ya que existen valores en el intervalo (a , b) donde la función es constante, observar el intervalo (c , d).



La función es estrictamente decreciente en (a , b)



La función es monótona decreciente en (a, b). Pero no estrictamente decreciente ya que existen valores en el intervalo (a, b) donde la función es constante, observar el intervalo (c, d).



La función es constante en [a , b]. $\forall x \in$[a , b] es f(x)=c.

Transformación de funciones

En muchas ocasiones es posible la construcción de la gráfica de una función a partir de la gráfica de otra función conocida aplicando diversas transformaciones.

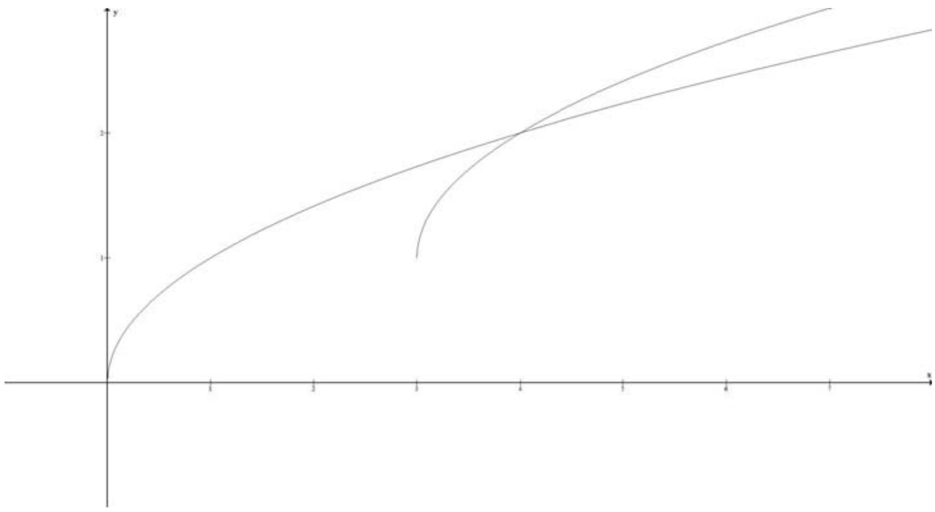
Desplazamientos horizontal y vertical

- La gráfica de la función $y = f(x) + c$ se puede obtener a partir de la gráfica de *f* mediante un desplazamiento vertical *c*.

- Asimismo, la gráfica de $y = f(x+c)$ puede obtenerse de la de *f* mediante un desplazamiento horizontal de magnitud –*c*.

Ejemplo

La gráfica de $y = \sqrt{x-3}+1$ se puede trazar desplazando la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ horizontalmente 3 unidades a la derecha y, verticalmente, 1 unidad hacia arriba.



Reflexión: Estas transformaciones son que originan gráficas simétricas de la de f:

- $y = -f(x)$: simetría respecto del eje x
- $y = f(-x)$: simetría respecto del eje y
- $y = -f(-x)$: simetría respecto al origen de coordenadas

Estiramiento y acortamiento vertical: La transformación $y = cf(x)$ produce un alargamiento vertical si *c*> 1, mientras que si 0 <*c*< 1 se trata de un acortamiento vertical.

Alargamiento y acortamiento horizontal: En este caso analizamos la transformación $y = cf(x)$: si *c*> 1, se acorta horizontalmente en un factor 1/*c*; si 0 <*c*< 1, se alarga horizontalmente en un factor 1/*c*.

Funciones pares e impares

- La función *f* es par si para todo elemento de su dominio se verifica que $f(x) = f(-x)$

- Según la definición, la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas.

- La función *f* es impar si para todo elemento de su dominio es: $f(x) = -f(-x)$

La gráfica de una función impar es por lo tanto simétrica respecto al origen de coordenadas.

Álgebra de funciones

Dadas dos funciones *f* y *g* (por simplicidad consideremos que ambas tienen el mismo dominio y el mismo codominio), es posible definir nuevas funciones mediante las siguientes operaciones:

- Suma de funciones: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

- Resta de funciones: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

- Producto de funciones: $(fg)(x) = f(x)g(x)$

- Producto de una función por un escalar: $(kf)(x) = kf(x), k \in R$

- Cociente de funciones: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

Composición de funciones

Dadas las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$, luego se define la función compuesta $g \circ f : A \to C$ como: $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

Clasificación de funciones

Recordemos que:

- Una función $f : A \to B$ es inyectiva si todo elemento del codominio es imagen de, a lo sumo, un elemento del dominio. O, en forma equivalente, *f* es inyectiva si elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.

- Una función $f : A \to B$ es suryectiva o sobreyectiva (o simplemente sobre el codominio) si todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio (o, en forma equivalente, si el conjunto imagen coincide con el codominio).

- La función f es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.

Observación

Se puede determinar gráficamente si una función es inyectiva del siguiente modo: toda paralela al eje de abscisas debe cortar a la gráfica de la función en no más de un punto.

Para comprobar si es suryectiva: toda paralela al eje de abscisas debe cortar a la gráfica de la función en al menos un punto.

Inversa de una función

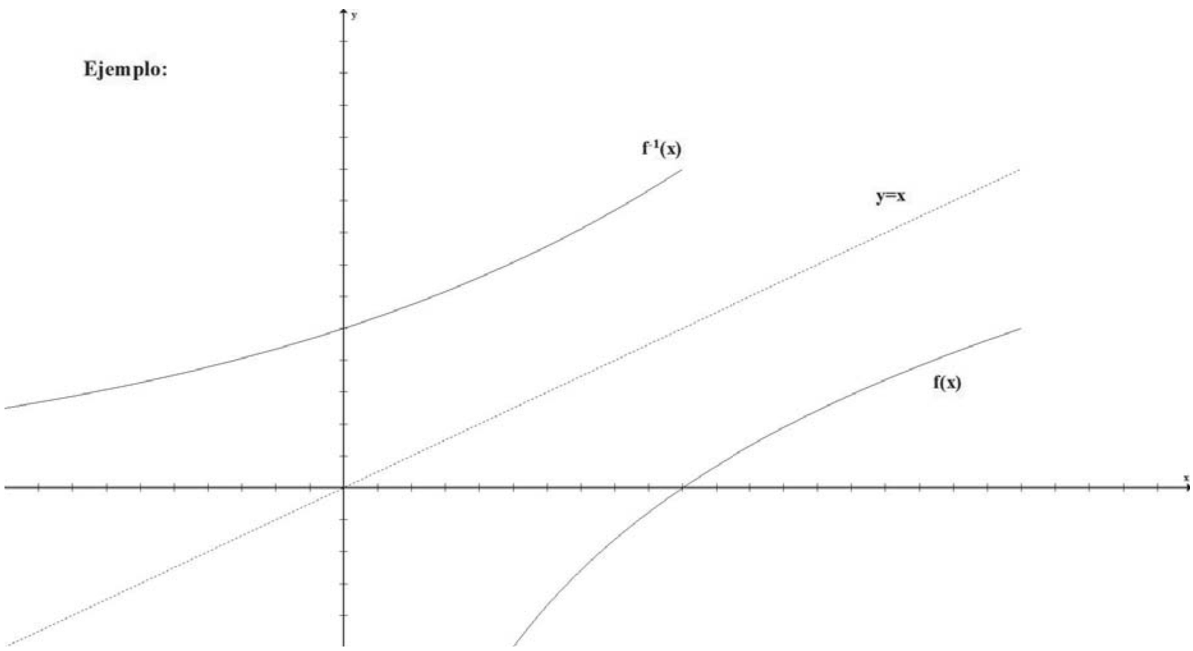
Si *f* es una función de *A* sobre *B* ($f : A \to B$) se define la inversa de *f* (denotada por f^{-1}) de la siguiente manera $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

La inversa de una función no es necesariamente otra función. Una condición necesaria y suficiente para que f^{-1} sea función es que *f* sea biyectiva. En este caso f^{-1} es también una función biyectiva:

$f : A \to B$ es función biyectiva $\Leftrightarrow f^{-1} : B \to A$ es función biyectiva.

Si *f* está dada mediante una fórmula, se puede encontrar la expresión para la inversa sustituyendo *x* por *y*, luego despejando *y*.

La gráfica de la función inversa es simétrica de la gráfica de la función con respecto a la recta que contiene a las bisectrices del primer y tercer cuadrante.



Función lineal

Una función lineal es una función cuyo dominio y codominio son todos los números reales, y su expresión analítica es *f(x)=mx+n* con *m* y *n* números reales.

Recordar que el ejemplo de la electricidad se trataba de una función lineal.

Ecuaciones de la recta

a) Ecuación pendiente - ordenada al origen

La ordenada al origen de una recta es el valor de n en donde la gráfica corta al eje y, es decir la recta pasa por el punto (0, n).

Pendiente de una recta: llamaremos m a la pendiente de una recta y se define de la siguiente manera, sean $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ dos puntos cualesquiera de la recta, entonces $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ ó $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (ambos cocientes dan el mismo resultado).

Luego la ecuación pendiente-ordenada al origen de la recta es $y=m.x+n$ (m: pendiente; n: ord. al origen).

Si tomamos la recta $y=-3x$, esta recta tiene pendiente –3 y ordenada al origen 0.

Ejemplo

Si una recta pasa por los puntos P=(2, 3) y por Q=(1, 0) luego m = $\dfrac{3-0}{2-1}=3$ (ó también $m=\dfrac{0-3}{1-2}=3$).

La ordenada al origen de una recta es el valor de n en donde la gráfica corta al eje y, es decir la recta pasa por el punto (0, n).

Pendiente de una recta: llamaremos m a la pendiente de una recta y se define de la siguiente manera, sean $P_1=(x_1;y_1)$ y $P_2=(x_2;y_2)$ dos puntos cualesquiera de la recta, entonces m = $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ ó m = $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (ambos cocientes me dan el mismo resultado).

La ecuación pendiente-ordenada al origen de la recta es: *y = m.x + n* (m: pendiente; n: ord. al origen).

Si tomamos la recta $y = -3x$, esta recta tiene pendiente –3 y ordenada al origen 0

Ejemplo: Si una recta pasa por los puntos *P=(2; 3)* y por *Q=(1; 0)* luego $m = \frac{3-0}{2-1} = 3$ (ó también $m = \frac{0-3}{1-2} = 3$).

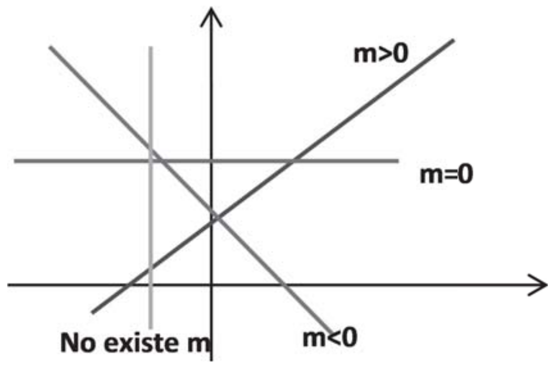
- Si la pendiente es m > 0 la recta es paralela a una que va del tercer al primer cuadrante.

- Si la pendiente es m < 0 la recta es paralela a una que va del segundo al cuarto cuadrante.

- Si la pendiente es m =0 la recta es paralela al eje x (horizontal).

Si la pendiente no existe la recta es paralela al eje y (vertical).

Observación

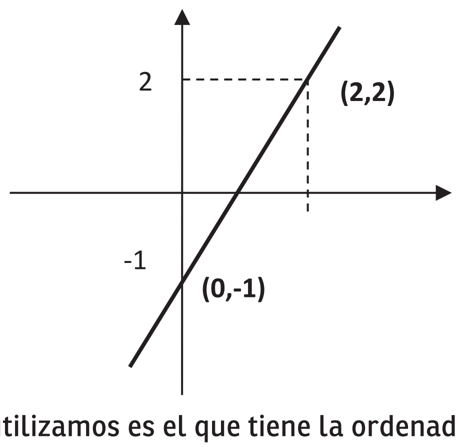


Ejemplo

- $y = \frac{3}{2}x - 1$ esta recta tiene *pendiente* $\frac{3}{2}$ y *ordenada al origen* -1

En la tabla de valores, se observa:

X	Y
0	-1
2	2



Uno de los puntos que utilizamos es el que tiene la ordenada al origen.

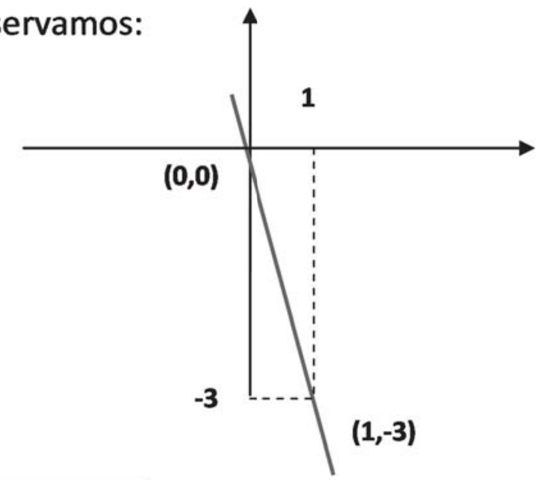
La pendiente es positiva por eso la recta es paralela a una que va del tercer al primer cuadrante (creciente).

Si tomamos ahora la recta $y = -3x$, esta recta tiene pendiente –3 y ordenada al origen 0

Si hacemos una tabla observamos:

Si hacemos una tabla observamos:

X	Y
0	0
1	-3

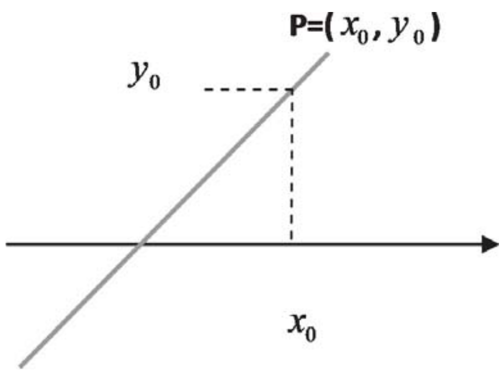


Como se ve en este caso la pendiente es negativa. Entonces la recta es decreciente.

b) Ecuación punto - pendiente

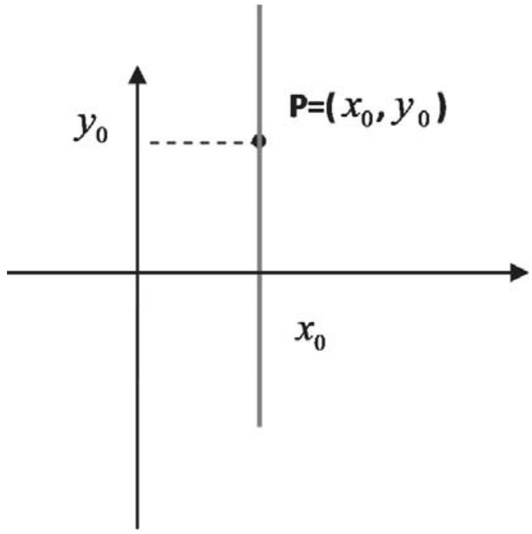
Si una recta pasa por un punto P=(x_0, y_0) y tiene pendiente m luego su ecuación es:

$y - y_0 = m(x - x_0)$



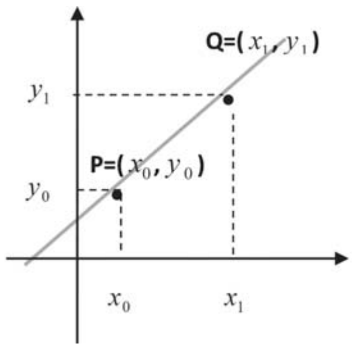
Observación

Cuando la recta es vertical la pendiente no existe entonces esta tiene ecuación: $x = x_0$



c) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Una recta pasa por los puntos P=(x_0, y_0) y Q=(x_1, y_1) tiene ecuación:



$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Donde $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ es la pendiente

A continuación se muestran que condiciones deben cumplir las pendientes de dos rectas para ser paralelas o perpendiculares, es decir para ver la posiciones relativas entre ellas.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Sean r_1 y r_2 dos rectas de pendiente m_1 y m_2, luego:

- Las dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente, es decir $r_1 \,//\, r_2$ si $m_1 = m_2$

- Las dos rectas son perpendiculares si la pendiente de una es igual al opuesto del reciproco de la otra, es decir

  $r_1 \perp r_2$ si $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Funciones Lineales

Una función de la forma *f(x) = mx + n*, donde *m* y *n* son números reales; *m* representa la pendiente y *n* representa la ordenada al origen. Su dominio natural es el conjunto de los números reales (R).

La representación gráfica de una función lineal es una recta.

Función cuadrática

Ahora trabajaremos con otro tipo de funciones llamadas cuadráticas estas son funciones cuya fórmula está dada por polinomios de segundo grado.

La forma general de una función cuadrática es:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, **con** $a \neq 0$

Donde a, b y c son números reales constantes, con $a \neq 0$ (*a* distinto de cero), ya que si $a = 0$, el polinomio obtenido es de la forma $f(x) = bx + c$ que como ya vimos es una función lineal.

El dominio natural o de definición de cualquier función cuadrática, al igual que de cualquier función lineal, es el conjunto de todos los números reales (R).

Nota

A fin de que el alumno comprenda la potencialidad de las funciones en problemas de la vida real es que el docente puede introducir este tema utilizando el siguiente ejemplo.

Aplicación física de las funciones cuadráticas

Objetivo: lograr que el alumno comprenda una aplicación física simple para las funciones cuadráticas.

Elementos de trabajo: calculadora, papel y lápiz.

Organización: una clase expositiva con participación de los alumnos.

Tiempo: 30-40 minutos aproximadamente.

Consigna: Caída libre

Si dejamos caer un objeto desde una altura inicial y_0 en el vacío, sin considerar ni vientos laterales ni el rozamiento con el aire, el mismo cae en forma vertical. La distancia respecto del suelo en un instante t, medido en segundos, previo al llegar al suelo, expresada en metros, es $h(t) = -4{,}9t^2 + y_0$.

Por ejemplo: si lo dejamos caer desde una altura inicial de 2m la función sería $h(t) = -4{,}9t^2 + 2$.

Para el docente: Plantee a los alumnos las siguientes actividades y posibilite la discusión acerca de las posibles respuestas.

Considerando esta última situación:

1. Evalúe *h(0)* ¿Qué significa? (*Esperar las respuestas de los alumnos*)

Posible respuesta

h(0)= 2 [m] la función evaluada en el tiempo t=0 (el tiempo inicial) me da la altura inicial.

2. ¿Qué tiempo tarda en impactar contra el suelo? <Esperar las respuestas de los alumnos>

Posible respuesta

Hacemos *h(t)=0* . Obtenemos $-4{,}9t^2 + 2 = 0$ resolviendo. $-4{,}9t^2 = -2$

$$t^2 = \frac{-2}{-4{,}9}$$

$$t_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{4{,}9}} \approx \pm 0{,}639 \text{ [s]}$$

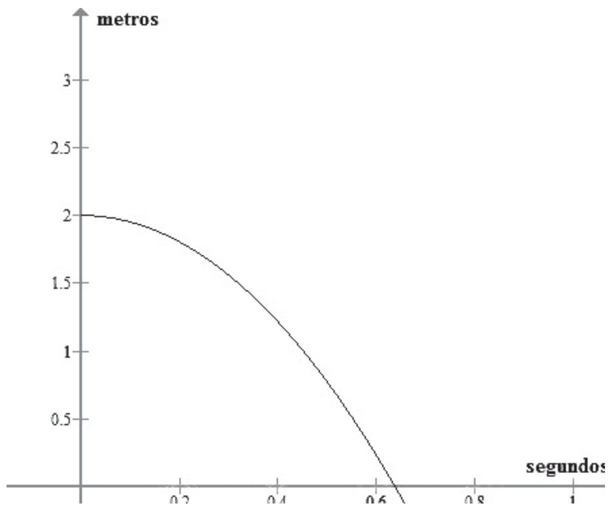
ACTIVIDADES

Como el tiempo es positivo la respuesta es que en aproximadamente 0,639 segundos impactará contra el suelo.

3. Realice una gráfica que represente cómo varia la altura en metros en función del tiempo.

Posible respuesta

La gráfica podría ser:



Veamos a continuación algunos ejemplos de Función Cuadrática:

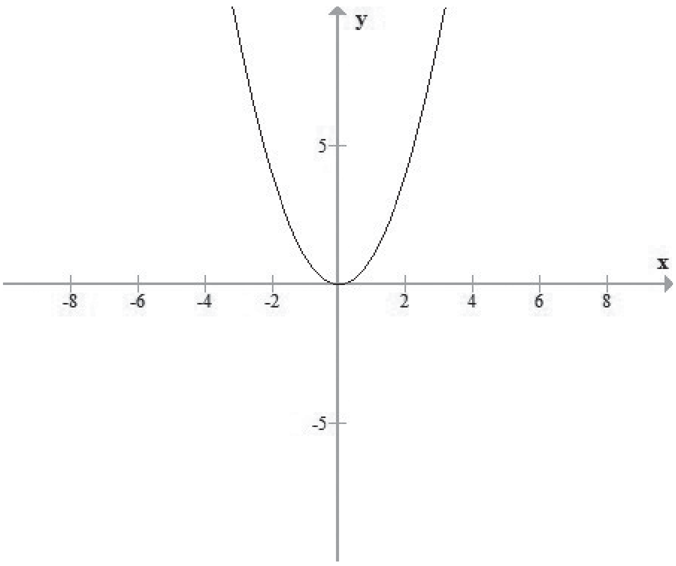
- $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$
- $g(x) = 7x^2 - 4$
- $h(x) = x^2$

La función cuadrática más simple está dada por $f(x) = x^2$. La grafica de esta función cuadrática servirá como base para trazar la de cualquier otra función cuadrática

Podemos ver que para la función $f(x) = x^2$, se cumple lo siguiente:

- $f(-3) = f(3) = 9$
- $f(-1) = f(1) = 1$
- $f(-0,5) = f(0,5) = 0,25$

Más generalmente $f(-x) = f(x)$, la función $f(x) = x^2$es una función par, por eso satisface esta condición. Recordemos que toda función par es simétrica respecto del eje y. Luego decimos que el eje y es el eje de simetría de la gráfica. La gráfica que representa a esta función es una parábola.



De hecho la gráfica de cualquier función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola.

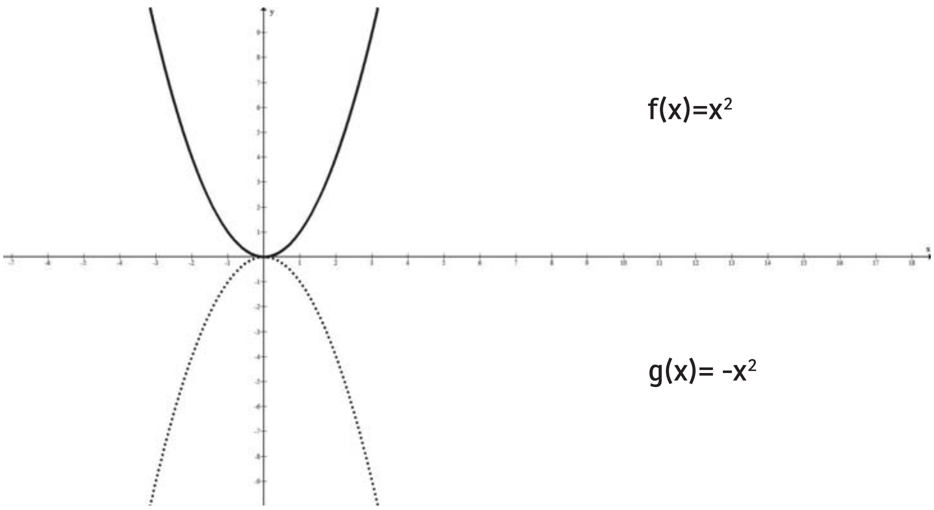
Eje de Simetría

Una de las características más importantes de las parábolas es que son simétricas respecto de una recta vertical llamada *eje de simetría*. En el caso de $f(x) = x^2$ el eje de simetría tiene ecuación $x = 0$ (por ejemplo: *y*), esta simetría se debe al hecho de que $(-x)^2 = x^2$.

Vértice

Cualquier parábola presenta un punto de inflexión llamado *vértice*, que se localiza en la intersección del eje de simetría con la propia parábola. Por ejemplo la parábola que representa a la función $f(x) = x^2$ tiene su vértice en el punto (0,0), el origen de coordenadas.

La gráfica de la función $g(x) = -x^2$ es simétrica a la de la función $f(x) = x^2$ respecto del eje *x* y tiene el mismo vértice y eje de simetría como podemos observar en el siguiente gráfico: trazamos la gráfica de $f(x)$ y la de $g(x)$.



Dominio, Codominio e Imagen de una Función Cuadrática

Observemos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que veníamos estudiando tienen Df=R yDg=R, refiriéndonos en ambos casos a sus dominios naturales, mientras que si observamos las imágenes (el conjunto imagen): Im f= R^+_0 , el conjunto de los reales no negativos: { x $\in$ R / x $\in$ 0}, y la Im g = R^-_0 (el conjunto de los reales no positivos: { x $\in$ R / x $\in$ 0}).

De hecho cabe observar que $g(x) = -f(x)$.

Concavidad

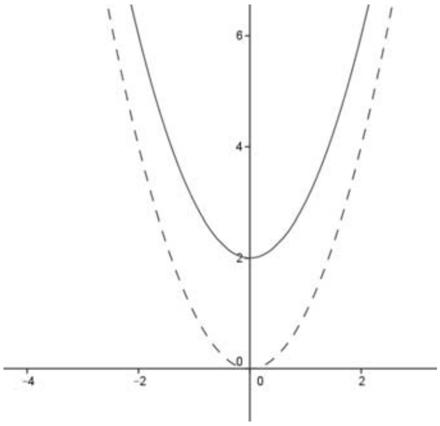
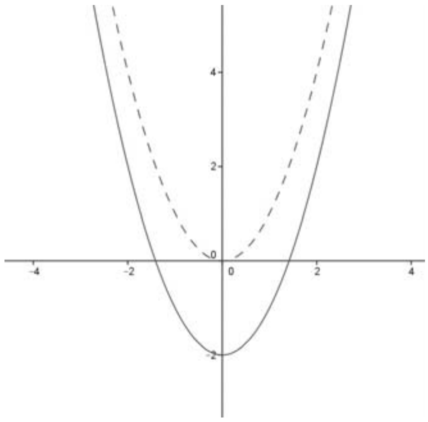
Decimos que la gráfica de $f(x) = x^2$ es cóncava hacia arriba, ya que las ramas de la misma apuntan hacia arriba, y que la de $g(x) = -x^2$ es cóncava hacia abajo, ya que sus ramas apuntan hacia abajo.

Observemos del gráfico anterior que $f(x) = x^2$ decrece a la izquierda de su eje de simetría en el intervalo (-∞, 0) y crece a la derecha de este, en el intervalo (0,∞).

Mientras que la función $g(x) = -x^2$, crece a la izquierda del eje de simetría (x = 0) en el intervalo (-∞,0) y decrece a la derecha de este, en el intervalo (0,∞).

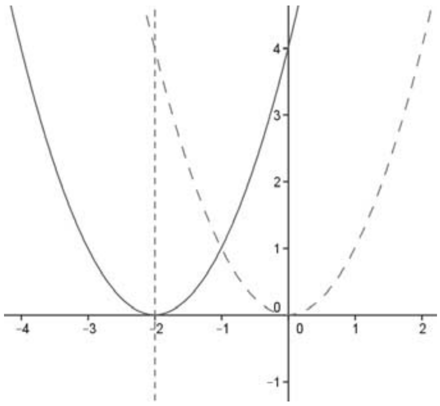
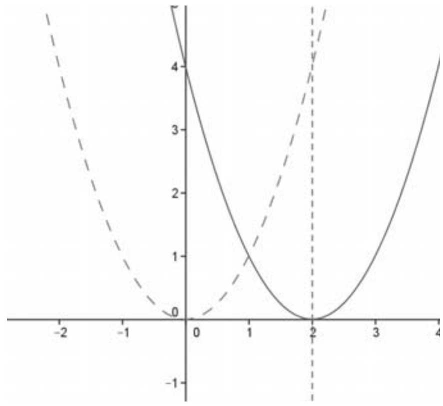
Desplazamientos a partir de la función $y = x^2$

La gráfica de $y = x^2$ puede servir de guía para graficar otras funciones cuadráticas. En los siguientes ejemplos a), b), c) y d) se muestra la gráfica de $y = x^2$ en líneas punteadas para poder compararla con otras funciones cuadráticas.

$y = x^2 + 2$	$y = x^2 - 2$
	
La gráfica de $y = x^2 + 2$ es congruente con la de $y = x^2$ pero está desplazada 2 unidades hacia arriba.	La gráfica de $y = x^2 - 2$ es congruente con la de $y = x^2$ pero está desplaza-da 2 unidades hacia abajo.
El vértice de esta parábola es (0,2). El eje de simetría es: x = 0.	El vértice de esta parábola es (0, -2).
El eje de simetría es x = 0.	El eje de simetría es *x = 0.*

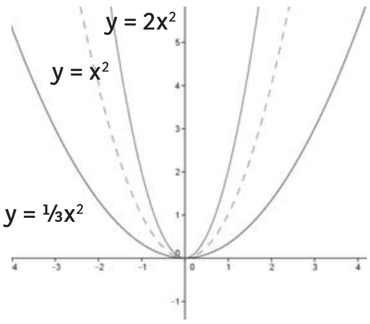
A continuación se observa la gráfica de la función $y = (x+2)^2$.

Como se le suma 2 a *x* y luego se eleva al cuadrado la expresión, luego para $x = -2$, $y = 0$ y el vértice de esta nueva parábola se ubica en el punto del plano *(-2,0)*, luego su eje de simetría tiene ecuación $x = -2$. Es decir está desplazada dos lugares hacia la izquierda respecto de $y = x^2$. De manera parecida la gráfica de la función $y = (x+2)^2$ está desplazada dos unidades hacia la derecha, luego su vértice es *(2, 0)* y su eje de simetría es *x = 2.*

$y=(x+2)^2$	$y=(x-2)^2$
	
La gráfica de $y=(x+2)^2$ es congruente con la de $y=x^2$ pero está desplazada 2 unidades hacia la izquierda.	La gráfica de $y=(x-2)^2$ es congruente con la de $y=x^2$ pero está desplazada 2 unidades hacia la derecha.
El vértice de la parábola (-2,0).	El vértice de la parábola (2,0).
Su eje de simetría tiene ecuación $x=-2$.	Su eje de simetría tiene ecuación $x=2$.

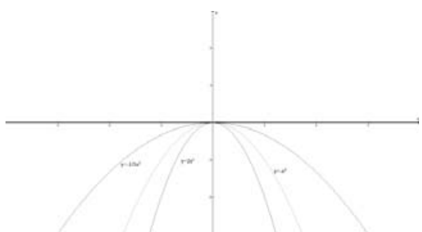
Ahora si comparamos las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas, mediante una tabla de valores, podemos observar:

x	$y = x^2$	$y = 2x^2$	$y = \frac{1}{3} x^2$
1	1	2	⅓
-1	1	2	⅓
3	9	18	3
-3	9	18	3
0	0	0	0



A medida que crece en valor absoluto el coeficiente *a* que acompaña a x^2 más aguda es la gráfica y cuando más pequeño es en valor absoluto más abierta es la gráfica. Otro ejemplo es:

x	$y = -x^2$	$y = -2x^2$	$y = -\frac{1}{3} x^2$
1	-1	-2	-⅓
-1	-1	-2	-⅓
3	-9	-18	-3
-3	-9	-18	-3
0	0	0	0



En resumen

Sea $y = (x - x_v)^2 + {y_v}^2$ luego el vértice tiene coordenadas: *(x_v , y_v)*, es decir x_v es la abscisa del vértice y y_v la ordenada.

La ecuación del eje de simetría es: $x = x_v$.

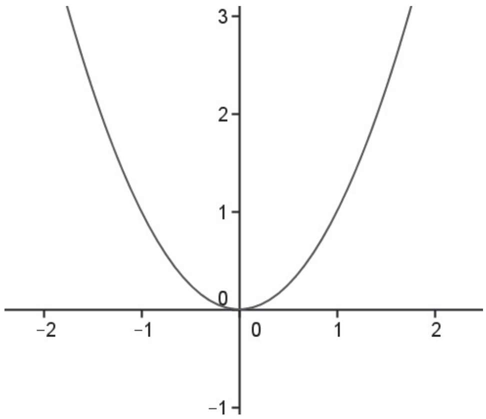
Si a > 0 la parábola es cóncava hacia arriba (sus ramas apuntan hacia arriba).

Si a < 0 la parábola es cóncava hacia abajo (sus ramas apuntan hacia abajo).

Veamos el siguiente ejemplo de la aplicación de lo anterior:

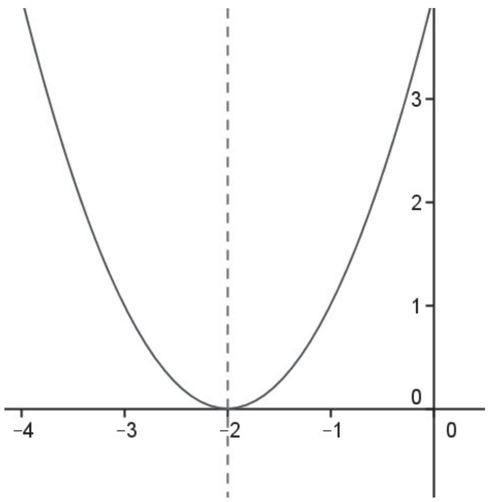
Se puede graficar a partir de $y = x^2$ la función $y = f(x) = (x + 2)^2 - 2$

Una manera conveniente de efectuar la gráfica de la función es comenzar con la gráfica de $y = x^2$:



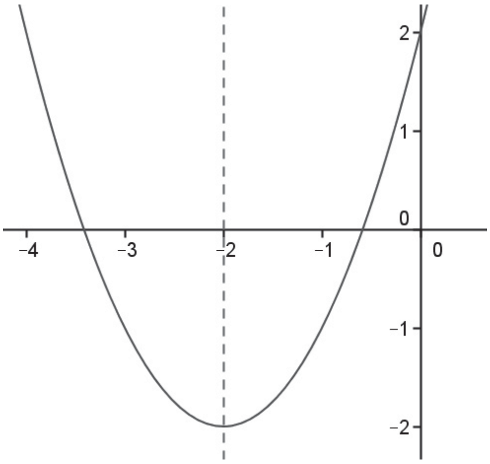
$y = x^2$

Desplazarla dos unidades hacia la izquierda:



$y = (x + 2)^2$

Y por último trasladarla dos unidades hacia abajo:



$y = (x + 2)^2 - 2$

La gráfica final tiene vértice en el punto (-2,2) y eje de simetría x = -2.

Esta forma nos permite identificar inmediatamente el vértice y el eje de simetría.

Ejemplos

Función	Vértice	Eje de Simetría	Concavidad
$y = -(x-1)^2 + 3$	*(1;3)*	*x=1*	$a = -1$, $a < 0$ *entonces la parábola es cóncava hacia abajo.*
$y = (x+0,5)^2 - 1$	*(-0,5;-1)*	*x=-0,5*	$a = 1$, $a > 0$ *entonces la parábola es cóncava hacia arriba.*
$y = -3x^2 - 1$	*(0;- 1);*	*x =0 (Eje x).*	$a = -3$, $a < 0$ *entonces la parábola es cóncava hacia abajo.*

Ecuaciones para hallar el vértice de una parábola

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con *a ≠ 0*, viene dada por la fórmula de la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Observemos que como el vértice $V = (x_V ; y_V)$ de la parábola se encuentra sobre el eje de simetría luego conociendo los ceros de la función podemos hallar la abscisa del mismo de la siguiente manera:

Si x_1 y x_2 son los ceros de la función cuadrática *f(x)* luego $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Si aplicamos esta última fórmula a las soluciones obtenidas de la fórmula de la resolverte podemos hallar una fórmula general para hallar la abscisa del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

La ordenada y_v del vértice la obtenemos calculando $y_v = f(x_v)$

Esta fórmula sirve también para cuando la función cuadrática no tiene ceros reales.

Otra aplicación de funciones cuadráticas

Un granjero decide criar patos y compra una cierta cantidad de machos y hembras. Se empiezan a reproducir y la población crece en función del tiempo. Este crecimiento está dado por la fórmula $p(t) = -2t^2 + 20t + 22$, en donde p es el número de patos y t los años transcurridos

1. ¿Cuántos patos compró?
2. ¿Cuándo se da la mayor población de patos y cuántos patos son?
3. ¿Cuándo hay 184 patos?
4. ¿En algún momento se extinguen? Si es así, ¿Cuándo?

En principio es una situación problemática que tendrá solución en los números naturales por tratarse de cantidad de patos (variable dependiente p) y el tiempo transcurrido en años (variable independiente t).

Posibles respuestas

1. ¿Cuántos patos compró?

   El tiempo inicial es p(t)=0 para conocer la cantidad de patos que compró.

   $$p(t) = -2.0^2 + 20.0 + 22$$

ACTIVIDADES

$p(t) = 2$

O sea, compró 22 patos.

2. ¿Cuándo se da la mayor población de patos y cuántos patos son?

   Se necesita conocer el punto máximo que alcanza la gráfica de la función, sabiendo que la grafica es una parábola cóncava hacia abajo (a<0). Se calcula el punto del vértice $(V_t ; V_p)$

   Donde: $V_t = \dfrac{-b}{2.a}$ $V_p = f(V_t)$

   En la situación inicial:

   $$a = -2; b = 20; c = 22$$

   $$V_t = \frac{-20}{2.-2} = \frac{-20}{-4} = 5$$

   $$V_p = f(5) = -2.5 + 20.5 + 22 = 112$$

   El vértice es

   $$V_{t;p} = (5;112)$$

   Esto es *en cinco años la población llegará a 112 patos como máximo.*

3. ¿Cuándo hay 184 patos?

   Es lógico responder que la población de patos no llegará a 184 patos ya que en el ítem anterior confirmamos que la población máxima será de 112 patos en 5 años. Podemos verificarlo algebraicamente:

   $$184 = -2.t^2 + 20.t + 22$$

   Reemplazando nos queda una ecuación cuadrática.

   $$184 = -2.t^2 + 20.t + 22$$

   $$0 = -2.t^2 + 20.t - 162$$

   Aplicando la fórmula resolvente, se encuentran dos soluciones posibles:

   $$t_1 ; t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$t_1;t_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4.(-2).(-162)}}{2.(-2)}$$

$$t_1;t_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 1296}}{-4} = \frac{-20 \pm \sqrt{-896}}{-4}$$

Esta ecuación no tiene solución, confirmamos lo dicho con anterioridad, la población de patos no llegará a 184 patos.

4. ¿En algún momento se extinguen? Si es así, ¿cuándo?

$$t_1;t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$t_1;t_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4.(-2).22}}{2.(-2)}$$

$$t_1;t_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 176}}{-4} = \frac{-20 \pm \sqrt{576}}{-4} = \frac{-20 \pm 24}{-4}$$

Donde $t_1 = -1$, $t_2 = 11$

Esto indica que la población de patos se extinguirá a los 11 años.

Función Exponencial y Logarítmica

Introducción a las funciones exponenciales

Imagine usted que un cultivo de bacterias crece con tal rapidez que a cada hora el número de bacterias se duplica. En estas condiciones, si había 10.000 bacterias cuando el cultivo comenzó a crecer, el número habría aumentado a 20.000 después de una hora, habría 40.000 después de 2 horas (ya que se habría duplicado la población de la hora anterior), y así sucesivamente. Luego la función que muestra el crecimiento de esta población es: *f(x) = (10.000).2* ^{x}

Esta función nos da el número de bacterias presentes después de *x* horas. Esta ecuación define una función exponencial.

De manera más general tenemos que las funciones exponenciales tienen la siguiente forma:

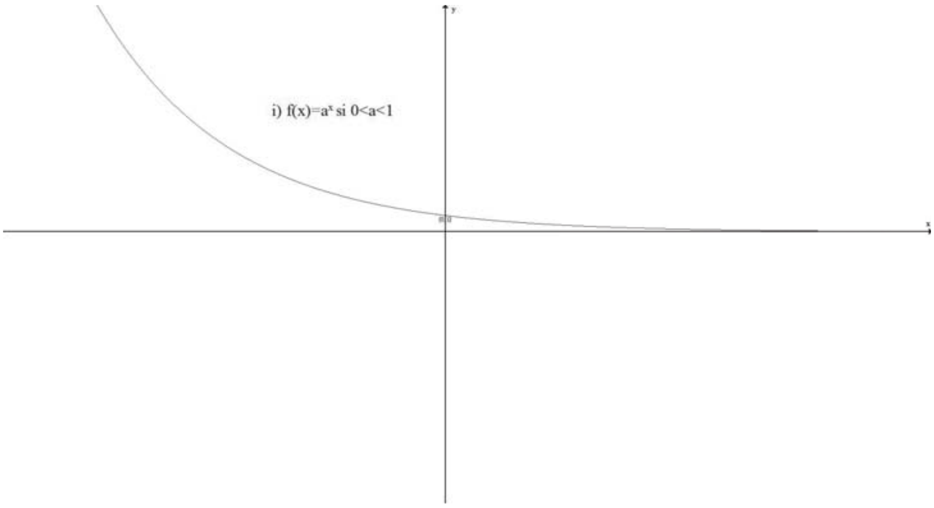
f: R → R^+/ f(x) = a^x donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

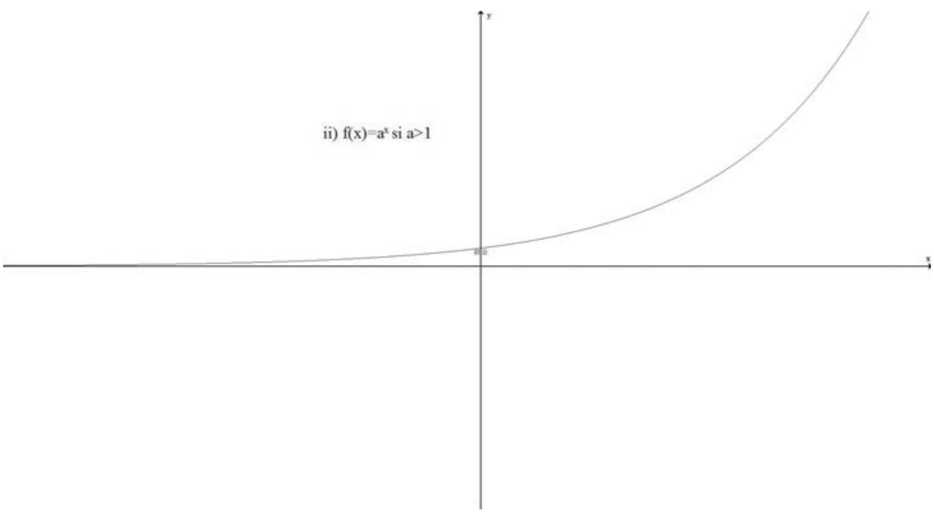
Llamamos al número *a* base de la función exponencial.

Observación

La función no tiene problemas para ningún valor de x. Luego su dominio natural o de definición es el conjunto de todos los reales, es decir Df = R. De igual manera la función no alcanza nunca valores negativos así como tampoco el cero, luego If = R^+.

Debemos dividir las funciones exponenciales en dos casos:





Observar:

- En ambos casos la función tiene ordenada al origen en y = 1 , ya que $f(0) = a^0 = 1$ (recordar que a > 0y a ≠ 1).

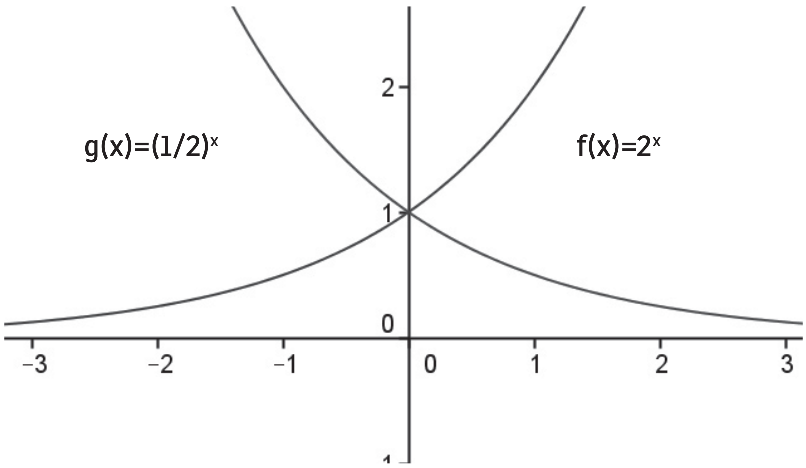
- Cuando a > 1: $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente en el intervalo (-∞, ∞), es decir es estrictamente creciente en todos los reales.

- Cuando 0 < a < 1: $f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente en el intervalo (-∞, ∞), es decir es estrictamente decreciente en todos los reales.

- No tiene ceros. Es decir nunca corta al eje x. De hecho se pega al eje x pero nunca lo toca, decimos que tiene una asíntota horizontal de ecuación y = 0 (eje x).

Ejemplo

Compare las gráficas de $f(x) = 2^x$de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (o equivalentemente, usando las propiedades de la potencia, $g(x) = 2^{-x}$).



Introducción a las funciones logarítmicas

Recordemos antes de comenzar la definición del logaritmo de un número:

Sean $a > 0$ y $a \neq 1$ y $b > 0$ dos números reales, luego $\log_a b = c$ sí y sólo sí $a^c = b$.

Llamamos al número real a la base del logaritmo.

Observación

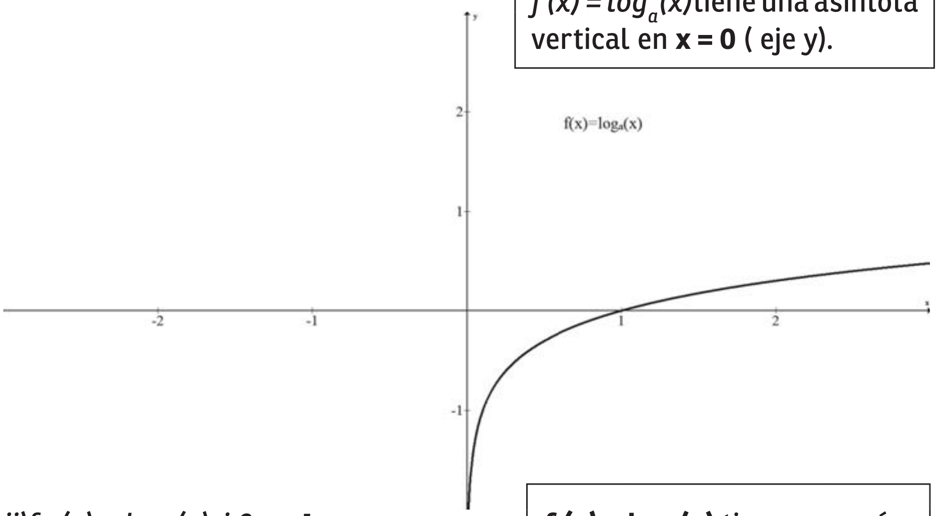
$\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$

Definimos a la función logarítmica como $R^+ \rightarrow R \,/\, f(x) = \log_a(x)$.

Es decir está definida solo en los reales positivos (dominio) y su imagen son todos los reales.

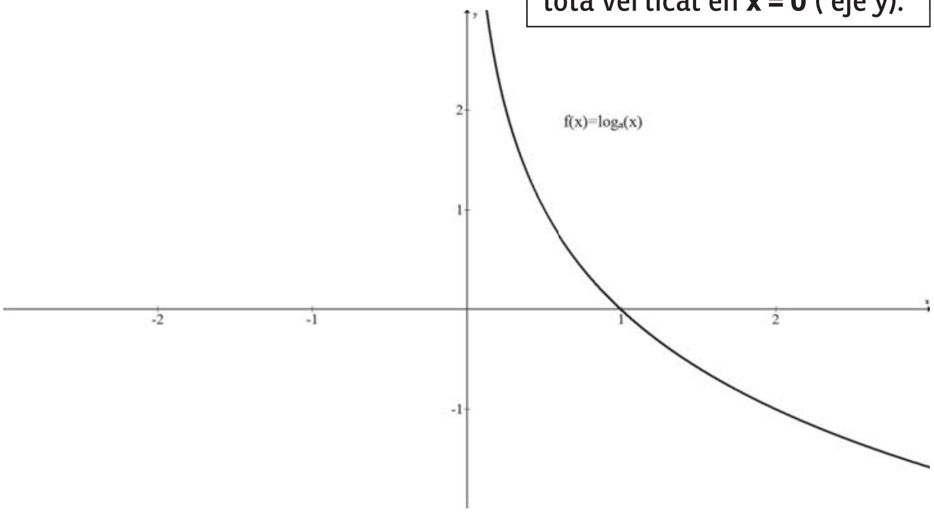
Gráficamente: *i)* $f(x) = \log_a(x)$ *si* $a>1$

$f(x) = log_a(x)$ tiene una asíntota vertical en **x = 0** (eje y).



ii) $f^{-}(x) = log_a(x)$ *si* $0<a<1$.

$f(x) = log_a(x)$ tiene una asíntota vertical en **x = 0** (eje y).



- Todas la funciones logarítmicas tienen un cero en x = 1, es decir cortan el eje x en x = 1 (abscisa al origen).

- Cuando a > 1: $f(x) = log_a(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0, \infty)$, es decir es estrictamente creciente en todos los reales.

- Cuando $0 < a < 1$: $f(x) = log_a(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(0, \infty)$, es decir es estrictamente decreciente en todos los reales.

Ejemplos

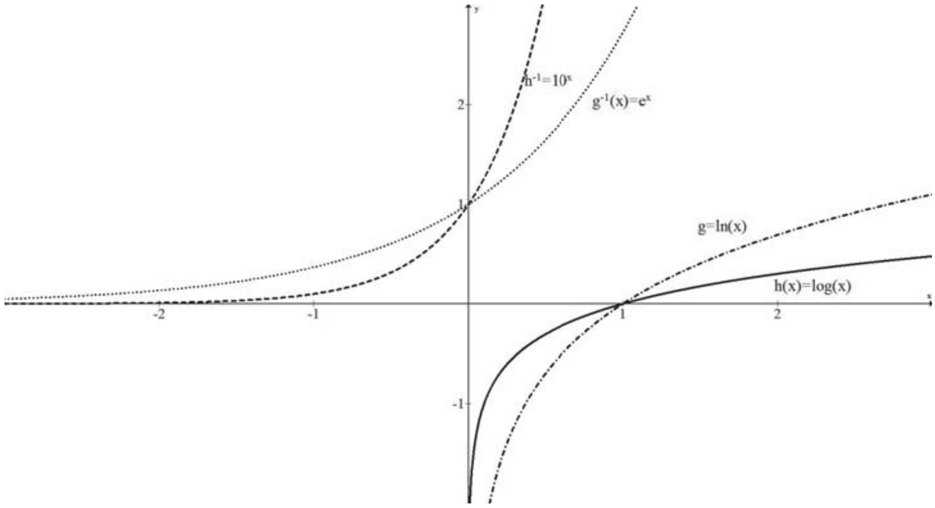
Un caso particular de función logarítmica es *g(x) = ln (x), logaritmo natural o neperiano.* Este logaritmo tiene por base el número irracional *e = 2,71828...* Luego la función inversa del logaritmo es $g^{-1}(x) = e^x$, *exponencial natural.*

Otro ejemplo es *$h(x) = log_{10}(x) = log(x)$* , cuando el logaritmo es base 10 no hace falta aclararlo. Luego *$h^{-1}(x) = 10^x$* .

Propiedades de los logaritmos: Sean b y d >0

- $\log_a (b \cdot d) = \log_a b + \log_a d$
- *$\log_a (b : d) = \log_a b - \log_a d$, si $d \neq 0$*
- *$\log_a (b^x) = x \log_a b$*
- *$\log_a (a^x) = x$ y $a^{\log_a (x)} = x$.*
- *$\log_a (1) = 0$ y $\log_a (a) = 1$*
- *Cambio de base: $\log_a (b) = \dfrac{\log(b)}{\log(a)} = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$*

En la siguiente grafica se muestra la relación de algunas funciones y sus inversas:



Dadas las siguientes funciones dé su dominio, imagen, ceros, intervalos de positividad y negatividad, paridad, crecimiento y decrecimiento. Grafique:

a) $y = \log_3(x) - 1$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

c) $y = e^{x+1} - 2$

d) $y = 2^{x^2}$

ACTIVIDADES

Módulo N° 3

Expresiones Algebraicas Enteras y Fraccionarias. Funciones Polinómicas y Racionales

¿Por qué estudiar Expresiones Algebraicas?

En módulo se orienta a desarrollar estrategias para superar el pasaje de la aritmética al álgebra, permitiéndole reconocer al estudiante los fenómenos de la vida cotidiana que pueden ser modelizados por expresiones algebraicas.

La propuesta consiste en abordar el aspecto algorítmico del funcionamiento algebraico en concordancia con el análisis del comportamiento de las variables en juego y las representaciones gráficas.

Nos proponemos los siguientes objetivos:

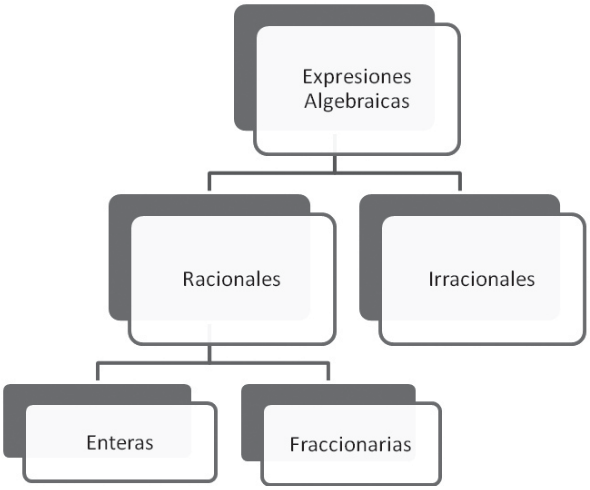
- Promover la comprensión y la modelización como aspecto fundamental de la actividad matemática.
- Conceptualizar las características inherentes al proceso de modelizar.
- Distinguir las continuidades y rupturas que se presentan en el pasaje de la aritmética al algebra.
- Proponer situaciones que admitan diferentes formas de representación.
- Argumentar en base al conocimiento matemático, utilizando la demostración deductiva.
- A partir de este abordaje es posible que el estudiante acceda a la geometría analítica, como un espacio en el que se integran las funciones y el álgebra como herramientas de modelización para resolver cuestiones de geometría.

Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es aquella que vincula números y letras por medio de las operaciones aritméticas: suma, resta, producto, cociente, potenciación y radicación.

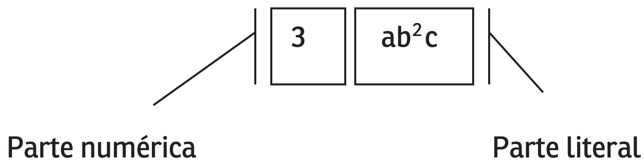
Por ejemplo, son expresiones algebraicas: $2x^3$, $\sqrt{2}xy^2$, $\dfrac{x^2+3}{y}$, $3x^2-5y$, $\dfrac{3\sqrt{m-1}}{2}$

Clasificación



Expresiones algebraicas enteras

Se llama enteras a las expresiones algebraicas donde las variables aparecen en el numerador y están afectadas solo a exponentes naturales.



Ejemplos de expresiones algebraicas enteras:

$$\frac{2}{3}x^2+2;\ \sqrt{2}-x^3;\ \frac{2}{5}y^3-2y^2+y$$

Monomios

Un monomio es una expresión algebraica entera de un solo término.

Un monomio tiene la forma $P(x) = ax^n$

$a \in R$ coeficiente

$n \in N$ exponente

- **Monomios semejantes**: son aquéllos que tienen la misma parte literal.

  Ej: $\frac{1}{2}x^2m$, x^2m y $-3x^2m$ son semejantes
- **Grado de un monomio:** es la suma de los exponentes de todas las letras o variables.

  Ej: $\frac{1}{2}x^2m$ su grado es 3
- **Operaciones con monomios:** se emplean en todos los casos las propiedades de los números reales.

Adición: solo se pueden sumar los monomios semejantes

$$\frac{1}{2}x^2m + x^2m - 3x^2m = -\frac{3}{2}x^2m$$

Multiplicación: se multiplican los coeficientes por un lado y para la parte literal se aplican las propiedades del producto de potencias de igual base.

$$\left(\tfrac{1}{2}x^2a\right).\left(-3x^2m\right) = -\tfrac{3}{2}x^4am$$

División: se dividen los coeficientes por un lado y para la parte literal se aplican las propiedades del cociente de potencias de igual base.

$$\left(\tfrac{1}{2}x^2am^5\right):\left(-5x^2m\right) = -\tfrac{1}{10}am^4$$

Polinomios

Llamamos polinomios a la adición y sustracción indicada de monomios *no* semejantes. Por ejemplo:

$$\tfrac{1}{2}x^2a - 3x^2m + a - \tfrac{3}{2}x^4m$$

Un polinomio tiene la forma $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$

$a \in R$ coeficientes

$a_n \neq 0$ Coeficiente principal

a_0 Término independiente

Grado de un polinomio

Es el grado del monomio de mayor grado de los que componen el polinomio.

Por ejemplo:

$\frac{1}{2}x^2a-3x^2m+a-\frac{3}{2}x^4m$ es grado 5 mientras que $\sqrt{2}m^6-3x^2yn$ es de grado 6.

Operaciones con polinomios

- **Adición:** sumamos los monomios semejantes de ambos polinomios.

  $$\left(\tfrac{1}{2}x^2a-3x^2m+a-\tfrac{3}{2}x^4m+1\right)+\left(2a+2x^2m-2\right)$$
  $$=\tfrac{1}{2}x^2a-x^2m+3a-\tfrac{3}{2}x^4m-1$$

- **Substracción:** se cambian los signos del polinomio sustraendo y se suman,

  $$\left(\tfrac{1}{2}x^2a-3x^2m+a-\tfrac{3}{2}x^4m+1\right)-\left(2a+2x^2m-2\right)$$
  $$=\tfrac{1}{2}x^2a-5x^2m-a-\tfrac{3}{2}x^4m+3$$

- **Multiplicación:** multiplicamos aplicando propiedad distributiva y sumamos los monomios semejantes,

  $$(x^2-3x^2a+a).(5a-2)=(\underline{5x^2a}-15x^2a^2+5a^2)+(-2x^2+\underline{6x^2a}-2a)$$
  $$=11x^2a-15x^2a^2+5a^2-2x^2-2a$$

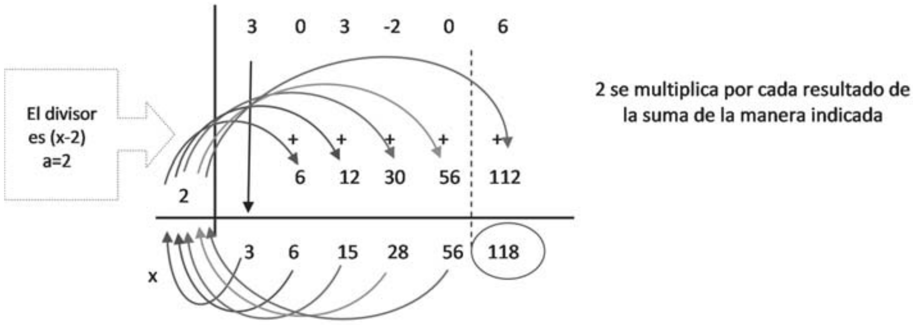
- **División:** una forma práctica de dividir polinomios es aplicando la regla de Ruffini.

En caso de que el dividendo sea un polinomio en *x*, es decir que la única letra que aparece en la parte literal es *x*, y divisor sea de la forma *(x-a)* (donde *a* es un número real). Entonces podemos calcular el cociente y el resto de la siguiente manera:

Sean $P(x)=3x^5-2x^2+3x^3+6$ y $Q(x)=x-2$

Primero se ordena el polinomio divisor de manera decreciente según las potencias del mismo y se lo completa:

$$P(x) = 3x^5 + \underline{0x^4} + 3x^3 - 2x^2 + \underline{0x} + 6$$



Proceso

1. Se baja el 3 (coeficiente de mayor grado) y luego se multiplica por el 2.

2. Se suma este resultado al segundo coeficiente del dividendo.

3. El resultado de esta suma se multiplica por 2 y se le suma al tercer coeficiente.

4. Se repite este proceso hasta terminar.

5. Una vez terminado reconstruimos nuestro cociente teniendo en cuenta que este es de un grado menor que el dividendo, esta ordenado decrecientemente, completo y los coeficientes del mismo son 2 6 15 28 56 y su resto es 118. Esto es:

   $C(x) = 3x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 28x + 56$ y R = 118.

Teorema del Resto

En el caso de la división de un polinomio en *x* por otro de la forma *(x-a)*, el resto es igual al valor numérico del polinomio dividendo en donde se remplaza *x* por *a*.

Ejemplo: Si tomamos el polinomio del ejemplo anterior:

$$P(2) = 3.(2)^5 - 2.(2)^2 + 3.(2)^3 + 6 = 118$$

Factoreo de expresiones algebraicas

Consiste en expresar un Polinomio como un producto de factores.

1° Caso - Factor común

Un factor común de un polinomio es un máximo común divisor (MCD) de todos sus términos. Es un factor que aparece en todos los términos y el mismo se extrae. El número de términos dentro del paréntesis es el mismo del polinomio original.

Ejemplos

$$4x^2y - 8x^3y^2a + 6x^5y^3b = 2x^2y(2 - 4xya + 3x^3y^2b)$$

$$\frac{1}{4}m^3n^2 + \frac{1}{2}mn - \frac{1}{8}m^4nc = \frac{1}{2}mn\left(\frac{1}{2}m^2n + 1 - \frac{1}{4}m^3c\right)$$

2° Caso – Factor Común por grupos

Se agrupan los términos y se extraen los factores comunes de cada grupo, luego se extrae los factores comunes a cada uno de los grupos, para factorizar completamente el polinomio (se tiene que poder armar grupos con las mismas cantidades de términos).

Ejemplos

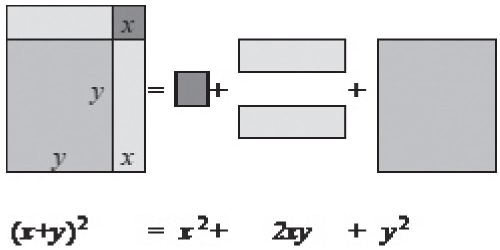
$$x^2 + bx - ax - ab = (x^2 + bx) + (-ax - ab) = x(x+b) - a(x+b)$$
$$= (x+b)(x-a)$$

$$2bx - 2b^2 + ax - ab = (2bx - 2b^2) + (ax - ab) = 2b(x-b) + a(x-b)$$
$$= (x-b)(2b+a)$$

3° Caso – Trinomio cuadrado perfecto

Previo la formalización del tema lo puede introducir observando lo siguiente.

Verifiquemos la fórmula del desarrollo del cuadrado del binomio $(x+y)^2$ observando las áreas de los siguientes cuadrados rosa (de lado *y*) , amarillo) (de lado *x*) y los rectángulos celestes (de lados *x* e *y*):



Claramente esto no es una demostración de la identidad $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ ya que tanto x como y pueden tomar valores negativos la misma se puede demostrar haciendo

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y)= x^2+yx+ xy+y^2 =x^2+2xy+ y^2$

Observar lo siguiente:

En $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$ tomando –y en lugar de y obtenemos

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Ejemplos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = .(2x - y)^2$$

$$x^6 + 2x^3 + 1 = (x^3 + 1)^2$$

4° Caso – Cuatrinomio cubo perfecto

Se aplica una de las siguientes fórmulas:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

5° Caso – Diferencia de cuadrados

Toda diferencia de cuadrados se puede transformar en el producto de la suma de las bases por la diferencia de las mismas:

$$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$$

Ejemplos

$$x^2 - 4 = (x + 2).(x - 2)$$

$$x^8 - y^2 = (x^4 + y).(x^4 - y)$$

$$3x^2 - 5 = (\sqrt{3}x + \sqrt{5}).(\sqrt{3}x - \sqrt{5})$$

Expresiones algebraicas racionales fraccionarias o fracciones algebraicas

Se llama así a las expresiones algebraicas donde al menos una variable está afectada a exponente negativo, o esta aparece en el denominador.

Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Simplificación: Es transformarla en otra expresión algebraica fraccionaria equivalente. Para ello se factoriza numerador y denominador, y luego se simplifica los factores comunes.

Ejemplo

$$\frac{x^2-y^4}{y^4-2xy^2+x^2}=\frac{(x-y^2).(x+y^2)}{(y^2-x)^2}=\frac{\cancel{(x-y^2)}.(x+y^2)}{(x-\cancel{y^2})^{\cancel{2}}}=\frac{x+y^2}{x-y^2}$$

Simplificación válida para $y^2 \neq x$

Adición: se factoriza numerador y denominador.

Para construir el nuevo denominador tomamos los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

Se suma como si se tratara de fracciones numéricas, es decir como sigue:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Ejemplo

$$\frac{x+1}{2x-2}+\frac{x^2+1}{x^2-1}-\frac{x-1}{2x+2}=\frac{x+1}{2(x-1)}+\frac{x^2+1}{(x-1).(x+1)}-\frac{x-1}{2(x+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+1)+2(x^2+1)-(x-1)(x-1)}{2(x-1).(x+1)}=\frac{x^2+2x+1+2x^2+2-(x^2-2x}{2(x-1).(x+1)}$$

$$=\frac{4x+2x^2+2}{2(x-1).(x+1)}=\frac{\cancel{2}(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{2}(x-1).\cancel{(x+1)}}=\frac{x+1}{x-1}$$

Simplificaciones válidas si y solo si $x \neq -1$

Multiplicación: se factorizan numeradores y denominadores y se simplifican los factores comunes entre el numerador y denominador.

Ejemplo

$$\frac{x+1}{-x^2-1+2x}\;\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{\cancel{x+1}}{-(x-1)^{\cancel{2}}}\;\frac{(\cancel{x+1})(\cancel{x-1})}{x(\cancel{x+1})}=-\frac{x+1}{(x-1)x}$$

Simplificaciones válidas si $x \neq -1$ y si $x \neq 1$

División: como con los números reales, se multiplica la primera fracción (dividendo) por la segunda fracción (divisor) invertida:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\frac{d}{c}$$

Ejemplo

$$\frac{x+2}{2x+2}:\frac{x+2}{-x^2-x}=\frac{x+2}{2x+2}\;\frac{-x^2-x}{x+2}=\frac{\cancel{x+2}}{2(\cancel{x+1})}\;\frac{-x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+2}}=-\frac{x}{2}$$

Simplificaciones válidas si $x \neq -1$ y si $x \neq -2$

ACTIVIDADES

1. Dados: $P(x)=5x^4-3x^3+4x-6$, $Q(x)=-3x^3+\frac{1}{2}x^2+3$ y $D(x)=x+3$ hallar:

   a. $P(x)+Q(x)=$

   b. $2P(x)-3Q(x)=$

   c. $Q(x)-P(x)=$

   d. $Q(x).Q(x)=$

   e. $P(x).Q(x)=$

   f. $P(3)=$

   g. $Q(-1)=$

2. Completar para que se trate de un trinomio cuadrado perfecto y luego factorizarlo.

   a. $4x^2+2x+....$

   b. $....-4x^2+1$

   c. $5x^4-....+2$

   d. $x^2-....+4$

3. Factorizar:

a. $3ab+3aq+3bp+3pq$

b. $5x+5bx+ax+abx$

c. $5a^2+10az+5z^2$

d. $4a^2b^3+4ab^3c+b^3c^2$

e. $32p-8pq^8$

f. $7x^6y^4-7y^4z^6$

g. $\frac{12}{5}ac+\frac{6}{5}ad+\frac{4}{5}bc+\frac{2}{5}bd$

h. yx^4-16y

i. $-8-2x^2-8x$

4. Dadas $P(x)=\dfrac{9x^2-1}{3x+1}$ $Q(x)=\dfrac{81x^3-9x}{9x^2+6x+1}$

Resuelva:

e. $P(x)+Q(x)=$

f. $2P(x)-3Q(x)=$

g. $Q(x)-P(x)=$

h. $P(x).Q(x)=$

i. $P(x):Q(x)=$

j. $P(3)=$

k. $Q\left(-\frac{1}{3}\right)=$

Funciones Polinómicas

Recordemos previamente qué nos decía el teorema del resto.

Teorema del Resto: El resto de la división de un polinomio P(x) con uno de la forma (x-c) tiene resto igual al valor numérico del polinomio en c. Es decir p(x): (x - c) tiene resto R = p(c).

Si **c** es un cero o raíz del polinomio, es decir *p(c)=0*, observamos por este teorema que *(x-c)* es un factor del polinomio.

De ahora en adelante hablaremos indistintamente de ceros o de raíces de un polinomio.

Teorema de las n raíces: Si *P(x)* es un polinomio de grado n ≥1, entonces tiene exactamente n raíces, considerando las reales y las complejas con sus multiplicidades.

Esto quiere decir que un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces. Gráficamente esto es que la gráfica de una función polinómica dada por un polinomio de este tipo corta a lo sumo n veces al eje x.

Funciones polinómicas: Una función polinómica de grado n es una función $f: R \rightarrow R$ que pueden expresarse como $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$

Teorema de Gauss de las raíces racionales: sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, un polinomio con coeficientes enteros ($a_i \in Z, \forall i = 1,..., n$), sean p_k y q_k los divisores enteros de a_0 y de a_n respectivamente, luego las raíces racionales, en caso de existir, vienen dadas por $\left\{ \pm \frac{p_k}{q_k} \right\}$.

Teorema de Bolzano: Si P(a) y P(b) tienen signos opuestos, existe un número real c entre a y b para el cual P(c) = 0

La regla de Descartes dice que:

- el número de raíces positivas de P(x) es igual al número de variaciones de signo de los coeficientes de P(x), o menor a ese número en un número par.

- el número de raíces negativas de P(x) es igual al número de variaciones de P(–x), o menor a ese número en un número par.

Cotas superiores e inferiores:

- Si al dividir P(x) por el binomio x – b, (b> 0) todos los elementos resultan no negativos, b es una cota superior de los ceros de P(x).

- Si al dividir P(x) por el binomio x – a, (a< 0) los elementos resultan alternadamente no positivos y no negativos, a es una cota inferior de los ceros de P(x).

Ejemplos

- Analicemos la función polinómica $f(x) = x^2 - 1$. Tratemos de hallar sus raíces, dijimos que es lo mismo buscar raíces que ceros luego podemos resolver factorizando:

  $x^2 - 1 = (x - 1).(x + 1)$

  Es decir que $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ son raíces o ceros de la función y como aparecen en un solo factor es son de multiplicidad uno.

- Veamos raíces de multiplicidad mayor que uno:
  Sea $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 3x$ la podemos factorizar como:

  $$3x^3 + 6x^2 + 3x = 3x(\ x^2 + 2x + 1) = 3x(\ x + 1)^2$$

  $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$. Observar que -1 es una *raíz o cero* de multiplicidad 2 ya que $(x+1)^2 = (x+1).(x-1)$ y 0 es una raíz de multiplicidad uno.

- Sea la función $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$. Como los signos varían tres veces en $f(x)$ puede tener tres raíces positivas, y como para *f*(-x) no hay cambio no tiene raíces negativas. Si sabemos que 2 (se puede hallar aplicando Gauss) es una raíz del polinomio luego (x–2) es un factor entonces podemos utilizar Ruffini para factorizar el polinomio:

	2	-12	22	-12
2		4	-16	12
	2	-8	6	0

Luego $f(x) = (2x^2 - 8x + 6).(x - 2)$

Utilizando el método de la resolvente para $2x^2 - 8x + 6 = 0$ obtenemos $x_2 = 1$ y $x_3 = 3$

Luego el polinomio se factoriza completamente como: $f(x) = 2.(x-2).(x-1).(x-3)$ Como vemos tiene tres raíces de multiplicidad uno. Luego su gráfica corta al *eje x* en tres lugares.

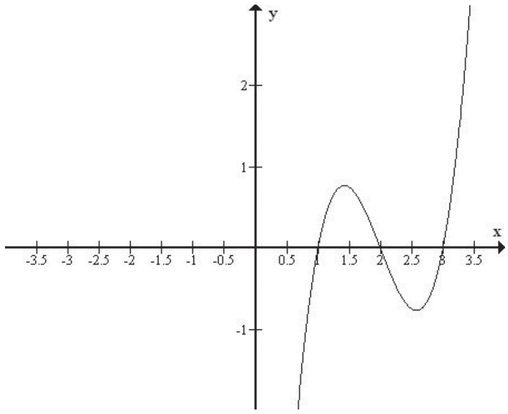
No conocemos el grafico exacto de esta función pero podemos esbozar un grafico teniendo en cuenta lo siguiente: Los ceros de la función son x =1, 2 y 3.

- f(x) es negativa a la izquierda de x =1, f(0) <0.
- f(x) es positiva entre x =1 y x =2, f(1,5) >0 .
- f(x) es negativa entre x =2 y x =3 , f(2,5) <0
- f(x) es positiva a la izquierda de x =3 , f(10) >0

Los intervalos de positividad son: $(1,2)$ *y* $(3,+\infty)$.

Los intervalos de negatividad son: $(-\infty,1)$ *y* $(2,3)$.

La grafica correspondiente a *f(x)* es:



Funciones racionales

Las funciones racionales son aquellas funciones cuya fórmula viene dada por el cociente entre dos polinomios. El dominio natural de estas funciones son todos los valores reales que no anulen el denominador. Es decir

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con P y Q polinomios, Q no nulo, luego el dominio

Df={ x $\in$ R / Q(x) $\neq$ 0}

ACTIVIDADES

Grafique:

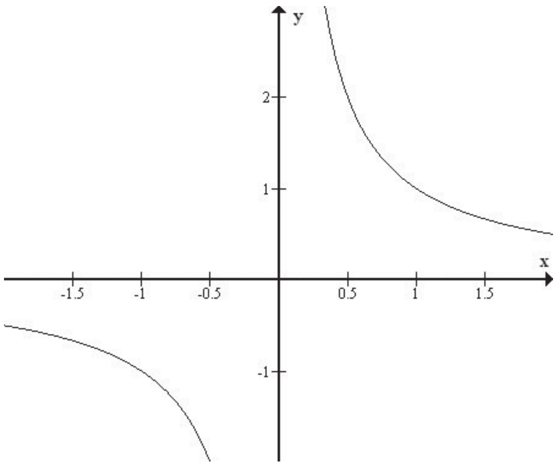
$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{x^2 - x}{2x-2}$; $h(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{2x}$

(ayuda, simplifique primero)

Funciones homográficas

Son funciones racionales donde el denominador es un polinomio de grado uno y el numerador uno de grado menor o igual a uno. La más simple es: f(x) = $\frac{1}{x}$. Observemos su gráfico:

x	f(x) = $\frac{1}{x}$
1	1
-1	-1
0,1	10
-0,1	-10
0,001	1000
-0,001	-1000
10	0,1
-10	-0,1
1000	0,001
-1000	-0,001
0	No existe



El *Df= R- {0}* y la *Im f= R- {0}.*

Luego, por lo observado, decimos que *f(x)* = $\frac{1}{x}$ tiene una asíntota vertical de ecuación *x = 0* (se aproxima al eje y pero no lo intersecta) y una asíntota horizontal de ecuación *y = 0* (se pega al eje x pero no lo corta).

Observación

La función f(x) = $\frac{1}{x}$. Cuando tomamos valores muy cercanos a cero observamos que nuestra función toma valores positivos muy grandes si x > 0 y valores muy negativos si x <0. El valor x = 0 está fuera del dominio natural de la función. Cabe observar que la función no alcanza nunca el valor cero, y a medida que más nos alejamos del origen tomamos valores más cercanos a cero pero sin alcanzarlo.

Ecuación canónica de una función homográfica

$f(x)=\dfrac{a}{b(x-d)}+c$, donde x = d es la asíntota vertical e y = c es la asíntota horizontal. Además si $\dfrac{a}{b}>o$ la función es decreciente (en los respectivos intervalos) y si $\dfrac{a}{b}<o$ la función es creciente (en los respectivos intervalos).

ACTIVIDADES

Ejercite su comprensión: dar el dominio, imagen, asíntotas y graficar a partir de la función $f(x)=-\dfrac{1}{x}$: **g(x) =** $-\dfrac{1}{x}$**, w(x)=** $\dfrac{1}{|x|}$ **y h(x) =** $\dfrac{1}{x^2}$**.**

Módulo N° 4

Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones (2X2)

¿Por qué estudiar ecuaciones e inecuaciones?

La construcción de modelos matemáticos muchas veces necesita del planteo y resolución de ecuaciones e inecuaciones de diverso tipo, por lo que es fundamental que el alumno domine destrezas básicas que le permitan resolver los problemas que las involucran. Además los temas que se trataran en este módulo son básicos en el ingreso de las carreras vinculadas a las ciencias exactas.

Nos planteamos los siguientes objetivos:

- Que el alumno comprenda las diferencias entre ecuaciones e inecuaciones.

- Comprenda las técnicas básicas para la resolución de ecuaciones e inecuaciones sencillas.

- Introducir al alumno a la resolución de sistemas ecuaciones e inecuaciones con dos incógnitas (2x2).

Ecuaciones

Nos referiremos como ecuaciones a expresiones relacionadas mediante el signo igual en donde aparezcan incógnitas.

Ejemplo

$2x - 3 = 7$.

Si deseamos obtener el valor de x (la incógnita) podemos resolver la ecuación de la siguiente manera.

Si sumamos 3 a ambos lados de la igualdad no se altera la misma:

$2x - 3 + 3 = 7 + 3$

Agrupamos usando la propiedad asociativa para los reales:

$2x + (-3 + 3) = 7 + 3$

$2x + 0 = 10$

El cero es neutro para la suma:

$2x = 10$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{2}$ (o lo que es lo mismo dividiendo por 2)

$x = 5$

El valor de nuestra incógnita x es 5.

Si queremos verificar debemos reemplazar esta valor en la ecuación inicial y comprobar si esta se satisface.

Recordemos que la suma separa en términos y el producto en factores. La igualdad separa en miembros.

Observar que las propiedades están definidas solamente para la suma y el producto, recordar, como habíamos visto, que la resta en el fondo es una suma y la división en el fondo es una multiplicación, por lo tanto estas propiedades son cierta también para la resta y el cociente, en el caso de este último debemos pedir que el número por el que vamos a dividir ambos miembros sea <u>distinto de cero.</u>

Las propiedades que utilizamos arriba son las siguientes:

- **Propiedad de la adición de la igualdad**: Para todos los números reales a, b y c si $a = b$ entonces

  $+ c = b + c.$

- **Propiedad de la multiplicación de la igualdad**: Para todos los números reales a, b y c si $a = b$ entonces

  $a . c = b . c.$

Habitualmente cuando resolvemos ecuaciones en la secundaria no prestamos atención a estas propiedades y utilizamos la regla mecánica de pasar de un miembro a otro cambiando por la operación opuesta. Es decir que si tenemos un numero que está sumando pasa restando, si está restando pasa sumando, si está multiplicando pasa dividiendo, y si está dividiendo pasa multiplicando. Todos estos pasajes de términos y factores están justificados con las propiedades antes vistas.

Es importante tener en cuenta que si pasamos un factor al otro miembro dividiendo este debe ser distinto de cero, ya que la división por cero no existe.

Validez de una expresión

Recordemos que la división por cero no es posible, así como tampoco la raíz de un número negativo cuando el índice es par.

Siempre que se nos plantee una expresión analizaremos para qué valores esta es válida:

Por ejemplo

1. $\frac{x+3}{x-1}$ existe ⇔ $x \neq 1$.
2. $\sqrt[6]{x-1}$ existe ⇔ $x \geq 1$
3. x + 2 existe para todo x real.

A continuación veremos casos particulares de ecuaciones:

Ecuaciones de primer grado

Son las ecuaciones que se pueden expresar como *ax+b*=0 con *a* y *b* reales y *a* distinto de cero. Estas se resuelven de la manera antes vista.

Ecuaciones de segundo grado

Son las ecuaciones que se pueden expresar como ax^2+bx+c con $a,b,c \in R \wedge a \neq 0$.

Se pueden obtener las soluciones o raíces aplicando la formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Si $b^2-4ac>0$ la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Si $b^2-4ac=0$ la ecuación tiene una solución real única (raíz doble).

Si $b^2-4ac<0$ la ecuación tiene dos soluciones complejas conjugadas.

Ecuaciones exponenciales

Son en las que aparece la incógnita como exponente. Para resolver este tipo de ecuaciones se aplican las propiedades de la potenciación antes vistas y las siguientes propiedades, para a>0 $\wedge\ a \neq 1$: Si $a^b = a^c \Rightarrow b = c$

Si $a^b = c^b \Rightarrow a = c$

Ejemplos

a. $2^{x+1} = 8$ luego factorizando el 8 tenemos $2^{x+1} = 2^3 \Rightarrow x + 1 = 3$ luego *x*=2.

b. $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$ aplicando propiedades para la potenciación $\frac{2^x}{2} + 2^x + 2 \cdot 2^x = 7$ entonces sumando tenemos que $\frac{7}{4} 2^x = 7$ luego $2^x = 7 \cdot \frac{4}{7}$ finalmente $2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2.$

c. $3^x + 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$ aplicando propiedades para la potenciación $3^x + \frac{3^x}{3} + 3 \cdot 3^x = 117$luego sumando $\frac{13}{3} \cdot 3^x = 117$ despejando $3^x = 117 \cdot \frac{3}{13}$.
$= 37 = 3^3 \Rightarrow x = 3$

Ecuaciones logarítmicas

Son aquellas en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.
Recordemos las propiedades de los logaritmos:
para a>0 $\wedge\ a \neq 1$, c>0 $\wedge\ c \neq 1$,b>0 y d>0

- $\log_a (b \cdot d) = \log_a b + \log_a d$
- $\log_a (b : d) = \log_a b - \log_a d$, si d ≠ 0
- $\log_a (b^x) = x \log_a b$
- $\log_a (a^x) = x$ y $a^{\log a(x)} = x$.
- $\log_a (1) = 0$ y $\log_a (a) = 1$

- Cambio de base: $\log_a(b) = \dfrac{\log(b)}{\log(a)} = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$
    - Si *$\log_a b = \log_c b = k$ entonces aplicando definición de logaritmo* $a^k = c^k \Rightarrow a = c$
    - Si *$\log_a b = \log_a c = k$ entonces aplicando definición de logaritmo* $a^k = b \wedge a^k = c \Rightarrow b = c$

Ejemplo

$\log_3(3x+1) = 4$ aplicando la definición de logaritmo $3x+1 = 3^4$ despejando $3x = 81 - 1$ Finalmente $x = \dfrac{80}{3}$.

Inecuaciones

En las inecuaciones, a diferencia de las ecuaciones, los miembros en vez de ser una igualdad expresan una desigualdad. Por ejemplo:

x + 2 ≥ -1.

Para resolver una inecuación debemos tener en cuenta las propiedades de monotonía para las desigualdades:

1. Si sumamos (o restamos) el mismo número a ambos miembros de la inecuación la desigualdad no cambia.
2. Si multiplicamos (o dividimos) por el mismo número positivo ambos miembros de la inecuación, la desigualdad no cambia.
3. Si multiplicamos (o dividimos) por el mismo número negativo ambos miembros de la inecuación, la desigualdad se invierte.

Ejemplos

a. $a \leq b \Rightarrow a - 2 \leq b - 2$.

b. $-0{,}9 > -2 \Rightarrow -0{,}9 + 2 > 0+2$

c. $1{,}1 > 0$.

d. $-5 < 3 \Rightarrow 2.(-5) < 2.3$

e. $-10 < 6$.

f. $2 \geq 1 \Rightarrow -2{,}5 \,.\, 2 \leq -2{,}5 \,.1$

$-5 \leq -2{,}5$ (Observar que se invierte la desigualdad)

g. $-5 < \frac{1}{16} \Rightarrow -5 \,.\, (-2) > \frac{1}{16}.\, (-2)$

$10 > -\frac{1}{8}$ (Observar que se invierte la desigualdad)

Resolvamos la siguiente inecuación:

$-2x - 5 < 3$

$-2x - 5 + 5 < 3 + 5$

$-2x < 8$

$\frac{1}{2}.\, (-2)x < \frac{1}{2}.\, 8$

$-x < 4$

$-1.(-x) > -1\,.4$

$x > -4$

El resultado final son los $x > -4$, luego la solución $x \in (-4, \infty)$. Si no se aclara lo contrario x es real luego la solución es todo el intervalo $(-4, \infty)$.

La inecuación puede no tener solución como por ejemplo:

$|x| < 0$.

Recordar que el valor absoluto de un número real es siempre mayor o igual a cero. En estos casos, cuando no haya solución posible, diremos que la solución es el conjunto vacío, en símbolos "solución= Φ".

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a. $x + 7 = 15$

   b. $3x + 7 = 15x$

   c. $x^2 + 3x = 28$

   d. $x^2 - 3x = 13x$

   e. $\frac{3x^2 + 9}{3} = 6$

   f. $x^2 + x + 1 = 0$

   g. $x^2 + 2x + 1 = 0$

   h. $x^2 + x - 2 = 0$

2. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

   a. $A = \{x \in R \,/\, |-5x| < 1\}$

   b. $B = \{x \in R \,/\, |3 + 3x| > 2\}$

   c. $C = \{x \in R \,/\, \left|\frac{2x - 5}{3}\right| \geq 1\}$

   d. $D = \{x \in R \,/\, \left|\frac{x}{5} - 2\right| > \frac{1}{2}\}$

   Recordar: Sea el número real a > 0 entonces:

   $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

   $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

   $|x| > a \Rightarrow -a > x$ ó $a < x$

   $|x| \geq a \Rightarrow -a \geq x$ ó $a \leq x$.

3. Ecuaciones racionales. Luego de resolver, verifique las respuestas.

   Ejemplo: $\frac{-x + 1}{x} = 2$ **dominio:** $\{x \in R \,/\, x \neq 0\}$

   Luego $-x + 1 = 2x$

   $-3x = -1$

   $x = \frac{1}{3}$

ACTIVIDADES

a. |x+1|=2

b. $\dfrac{1}{-x+2}=0$

c. $(x^2+1)(x-\sqrt[3]{-2})=0$

d. $\dfrac{(x-2)(x^2-1)}{-x+2}=0$

e. $\dfrac{1}{-x+2}=\dfrac{2}{x}$

f. $x^{\frac{2}{3}}-1=0$

g. $\dfrac{|2x+4|}{-x+2}=0$

h. $\dfrac{2x+4}{-x+2}=\dfrac{-2x-2}{x+1}$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x-1}+9^x-3^{2x+1}=-\dfrac{5}{3}$ b) $5^{2x-3}=5^{-x^2}$

c) $\log_{(x+1)}(3)=\log_{(2x-3)}(3)$ d) $\log_8(x-6)+\log_8(x+6)=2$

Sistemas de ecuaciones lineales (de 2x2)

Se presentaran a continuación algunos métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Estos pueden escribirse de manera general como

$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ con a,b,c,d,e,f números reales.

Se resolverá el siguiente ejemplo para recordar los métodos más usuales.

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x-5y=0 \end{cases}$$

Método de sustitución

Este método consiste, básicamente, en despejar una incógnita en una ecuación y sustituir en la otra.

Si en el ejemplo despejo x de la primera ecuación obtengo $x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}y$ (1)

sustituyendo en la segunda se obtiene que $4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}y\right)-5y=0$ y resolviendo:

$$2-6y-5y=0$$

$$2-1\ \ y=0$$

$$-11y = -2$$

$$y = \frac{2}{11}$$

Reemplazando en (1) obtengo

$$x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{2}{11}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Solución= $\left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{2}{11}\right)\right\}$

Método de igualación

Es similar al anterior pero consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego igualar lo obtenido para así despejar. Si en el ejemplo despejamos x de las ecuaciones obtenemos $x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}y$ y $x = \frac{5}{4}y$ luego igualando

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}y = \frac{5}{4}y$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{4}y + \frac{3}{2}y$$

$$\frac{1}{2} = \frac{11}{4}y$$

$$\frac{2}{11} = y$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones despejadas

$$x = \frac{5}{4}\frac{2}{11} = \frac{5}{22}$$

Sol = $\left\{\left(\frac{5}{22}, \frac{2}{11}\right)\right\}$

Método de Gauss

$\begin{cases} 2x+3y=1(ec1) \\ 4x-5y=0(ec2) \end{cases}$ si multiplicamos por 2 la *(ec1)* y le restamos la *(ec2)*

obtenemos el sistema equivalente $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 0+11y=4 \end{cases}$.

En este método se combinan las siguientes operaciones elementales de renglón:

- Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una constante distinta de cero.

- Sumar (o restar) a una ecuación el múltiplo escalar de otra.

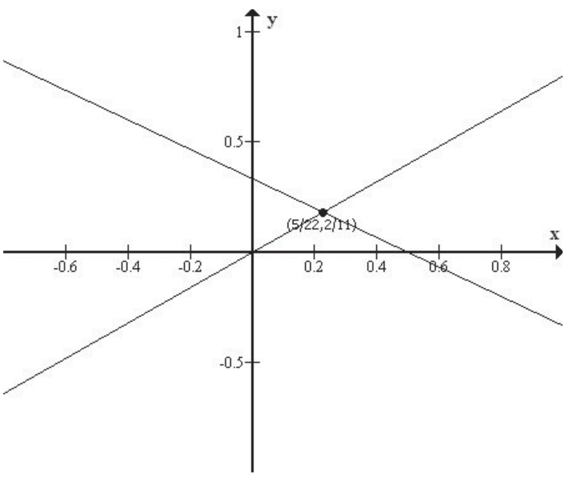
- Intercambiar dos ecuaciones de lugar.

De la segunda ecuación obtenemos $y=\dfrac{2}{11}$ luego sustituyendo en la primer ecuación obtenemos que $x=\dfrac{5}{22}$. Luego Sol = $\left\{\left(\dfrac{5}{22},\dfrac{2}{11}\right)\right\}$.

Método Gráfico

Cada ecuación de este tipo de sistemas $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ representa gráficamente una recta, el método grafico consiste en graficar ambas y observar gráficamente lo que ocurre.

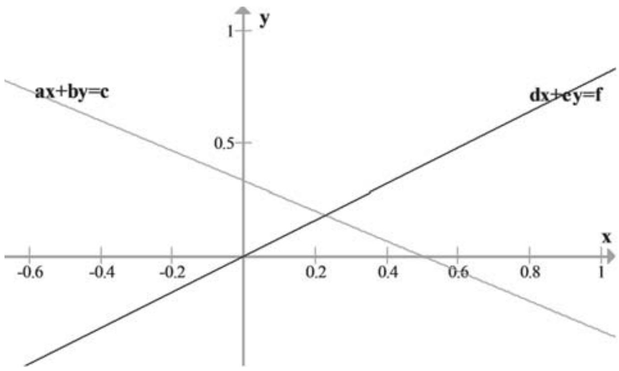
Resolvemos para el ejemplo $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x-5y=0 \end{cases}$



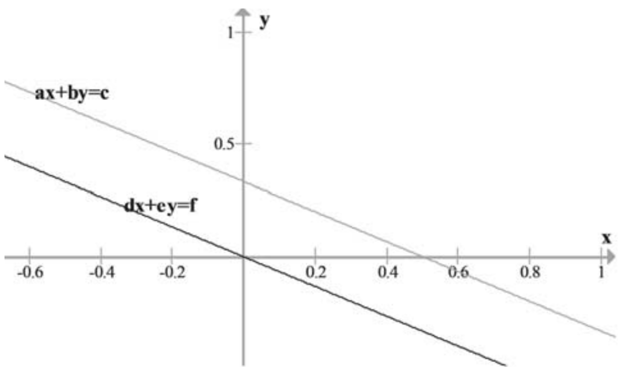
El ejemplo se trata de un sistema compatible determinado.

Interpretación gráfica de los distintos tipos del sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

Sistema compatible determinado

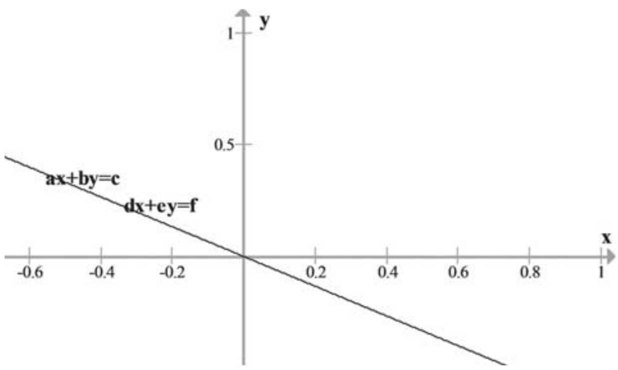


Sistema incompatible



Sistema compatible indeterminado (las dos ecuaciones tienen como gráfica la misma recta)

Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a sus soluciones:
Sistema compatible determinado: cuando tiene solución única.
Sistema compatible indeterminado: cuando tiene infinitas soluciones.
Sistema incompatible determinado: cuando no tiene solución.



Ejemplos

Resuelva y clasifique los siguientes sistemas

a. $\begin{cases} 3x-5y=3 \\ -6x+10y=1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x+4y=2 \\ 5x+10y=5 \end{cases}$

a. Aplicamos Gauss. Si se multiplica por dos la primera ecuación y se la suma a la segunda se obtiene $2Ec1+Ec2 \rightarrow \begin{cases} 3x-5y=3 \\ 0+0=7 \end{cases}$ como se observa en la segunda ecuación queda que 0=7 lo cual es un absurdo por lo tanto el sistema es incompatible (no tiene solución).

b. Si multiplicamos por 5 la primera ecuación y por 2 la segunda y luego restamos obtenemos $5Ec1-2Ec2 \rightarrow \begin{cases} 10x+20y=10 \\ 10x+20y=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x+20y=10 \\ 0+0=0 \end{cases}$ como se observa se pierde una ecuación y queda que $10x+20y=10$ despejando $x=1-2y$ como *y* puede tomar cualquier valor el sistema tiene infinitas soluciones sol=$\{x=1-2y, y \in R\}$entonces el sistema es compatible indeterminado.

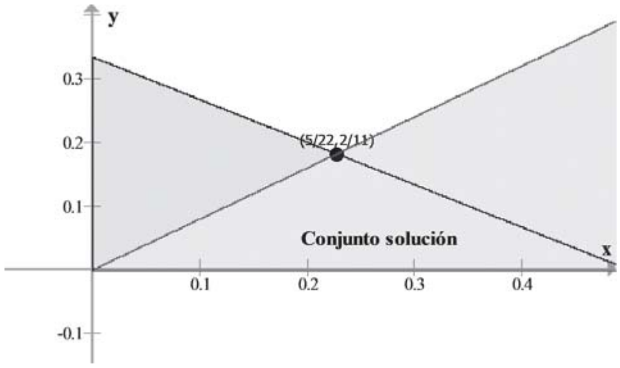
Sistemas de inecuaciones lineales

En los sistemas de inecuaciones lineales se reemplazan las ecuaciones lineales por inecuaciones. Aquí solo se verá la resolución grafica

Ejemplo: $\begin{cases} 2x+3y \le 1 \\ 4x-5y \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Primero se resuelve $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x-5y=0 \end{cases}$ para hallar la intersección de las dos rectas fronteras que es el punto (5/22;2/11) de la región, graficamos las dos rectas $2x+3y=1$ y $4x-5y=0$, la dos últimas inecuaciones indican que estoy en el primer cuadrante.

Despejando obtenemos que $\begin{cases} y \le \frac{1}{3}-\frac{2}{3}x \\ y \le \frac{4}{5}x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ sombreamos de acuerdo a las inecuaciones.



Donde se superponen las regiones sombreadas es mi región solución

ACTIVIDADES

1. Resuelva y clasifique los siguientes sistemas utilizando al menos dos métodos.

a. $\begin{cases} x-5y=-1 \\ -6x+10y=1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y-5x=3 \\ -6x+y=1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} 3x-5y=y \\ -6x+7y=-3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x-5y=3 \\ -18x+30y=1 \end{cases}$ e. $\begin{cases} 3x-3y=3 \\ 5x-5y=5 \end{cases}$

Respuestas: a) (1/4;1/4) compatible determinado; b)(2;13) compatible determinado; c)(6/5;3/5) compatible determinado; d) Sistema incompatible; e) Sistema compatible indeterminado la solución general es $\{x=1+y, y \in R\}$

2. Resuelva gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones para hallar el conjunto solución.

a. $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x \\ x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x-3y \geq 3 \\ y \geq 0 \\ x < 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} y-5x \leq 3 \\ -6x+y < 1 \end{cases}$

Módulo N° 5

Trigonometría, Teorema de Pitágoras

¿Por qué estudiar trigonometría?

Trabajar trigonometría en la escuela secundaria nos demanda preparar al estudiante desde los cursos inferiores con conceptos de geometría que sentarán las bases para el desarrollo de los nuevos temas.

A partir de la comparación de áreas en distintos triángulos, analizándolas en función de la variación de alguno de sus elementos, permite conocer la relación pitagórica entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo y disponer de ella para la resolución de diferentes situaciones. Para profundizar el estudio de los triángulos a partir de la noción de semejanza, se debe presentar el teorema de Thales.

Tanto el teorema de Pitágoras como el teorema de Thales, facilitaran la identificación de las relaciones trigonométricas por parte de los estudiantes, y les permitirán utilizarlas para resolver distintos tipos de situaciones.

Nos planteamos los siguientes objetivos:

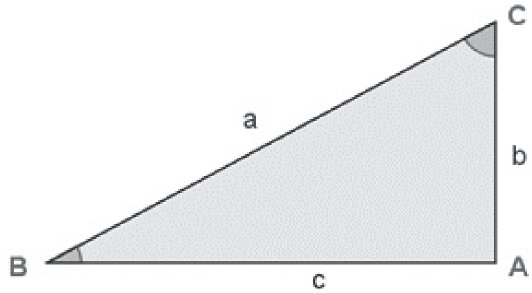
- Construir figuras reconociendo las propiedades que estas poseen.
- Conocer los criterios de igualdad de triángulos y las relaciones de ángulos entre paralelas.
- Establecer la relación pitagórica entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo y resolver distintas situaciones de la cotidianidad.
- Identificar y usar relaciones trigonométricas para resolver problemas que vinculan lados y ángulos en triángulos rectángulos.

Identificar y usar relaciones trigonométricas para resolver problemas que vinculen lados y ángulos de figuras.

Trigonometría

Es el área de la geometría que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos.

Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo



Seno

El seno del ángulo B es la razón entre las longitudes del cateto opuesto al ángulo y la de la hipotenusa.

Se denota por $sen\hat{\beta}$

$$sen\hat{\beta} = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

Coseno

El coseno del ángulo B es la razón entre las longitudes del cateto adyacente al ángulo y de la hipotenusa.

Se denota por $\cos\hat{\beta}$

$$\cos\hat{\beta} = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

Tangente

La tangente del ángulo B es la razón entre las longitudes del cateto opuesto al ángulo y del cateto adyacente al ángulo.

Se denota por $tg\hat{\beta}$

$$tg\hat{\beta} = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente} = \frac{b}{c}$$

Cosecante

La cosecante del ángulo B es la razón inversa (recíproco) del seno de B.

Se denota por $\cos ec\hat{\beta}$

$$\cos ec\hat{\beta} = \frac{1}{sen\hat{\beta}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto} = \frac{a}{b}$$

Secante

La secante del ángulo B es la razón inversa del coseno de B.

Se denota por $\sec\hat{\beta}$

$$\sec\hat{\beta} = \frac{1}{\cos\hat{\beta}} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente} = \frac{a}{c}$$

Cotangente

La cotangente del ángulo B es la razón inversa de la tangente de B.

Se denota por $\cot\hat{\beta}$.

$$\cot g\hat{\beta} = \frac{1}{tg\hat{\beta}} = \frac{\cos\hat{\beta}}{sen\hat{\beta}} = \frac{cateto\ \ adyacente}{cateto\ \ opuesto} = \frac{c}{b}$$

Razones trigonométricas en una circunferencia

Se llama circunferencia goniométrica a aquélla que tiene su centro en el origen de coordenadas y su radio es la unidad. En la circunferencia goniométrica los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

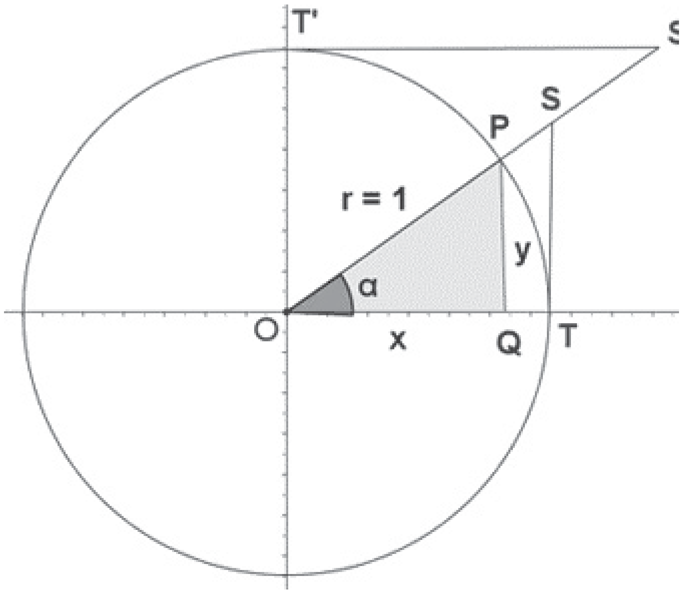
Observemos en el siguiente gráfico: -1 ≤ sen α ≤ 1 -1 ≤ cos α ≤ 1

QOP y TOS son triángulos semejantes.

QOP y T'OS′ son triángulos semejantes.

El seno es la ordenada del punto P.

El coseno es la abscisa del punto P.



Signo de las razones trigonométricas

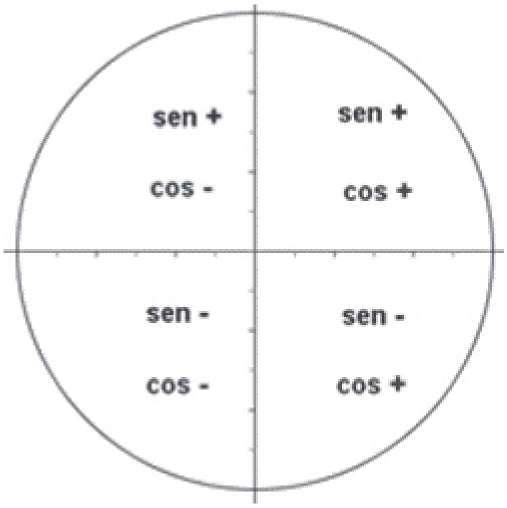
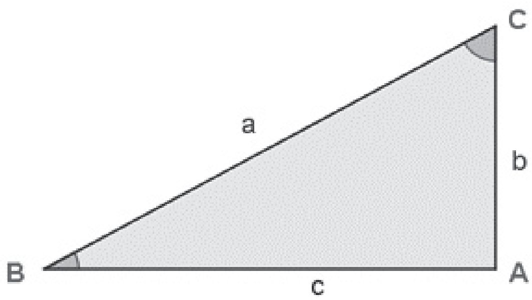


Tabla I: Razones trigonométricas de ángulos destacados

α	0	30° $\frac{1}{6}\pi$	45° $\frac{1}{4}\pi$	60° $\frac{1}{3}\pi$	90° $\frac{1}{2}\pi$	180° π	270° $\frac{3}{2}\pi$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\to \infty$	0	$\to -\infty$

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa $a^2 + b^2 = c^2$.



Si llevamos esto a la circunferencia goniométrica obtenemos la versión trigonométrica de este teorema.

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1}$$

Para buscar y analizar: busque distintas pruebas de este teorema.

Tabla II: Identidades de las razones trigonométricas de algunos ángulos

Ángulos complementarios		
$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\alpha$	$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot g\alpha$
Ángulos suplementarios		
$sen(\pi-\alpha)=sen\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$
Ángulos que difieren en π (180°)		
$sen(\pi+\alpha)=-sen\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$
Ángulos que suman 2π (360°)		
$sen(2\pi-\alpha)=-sen\alpha$	$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$	$tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha$

Ángulos opuestos o simétricos		
$sen\,(2\pi-\alpha)=-sen\alpha$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$tg(-\alpha)=-tg\alpha$
Ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$ (90°)		
$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sen\alpha$	$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot g\alpha$

Tabla III: Identidades de razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos

Suma	Diferencia
$sen\,(\alpha+\beta)=sen\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.sen\beta$	$sen\,(\alpha-\beta)=sen\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.sen\beta$
$\cos\,(\alpha+\beta)=sen\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.sen\beta$	$\cos\,(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+sen\alpha.sen\beta$
$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta}$	$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha.tg\beta}$

Tabla IV: Identidades de razones trigonométricas del ángulo doble

$sen.2\alpha=2.sen\alpha.\cos\alpha$	$\cos.2\alpha=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$	$tg.2\alpha=\frac{2.tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Tabla V: Identidades de razones trigonométricas del semiángulo

$sen.\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos.\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	$tg\,\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

1. Sabiendo que cos α = ¼ , y que 270º <α <360°. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α.

Respuesta:

$$sen.\alpha = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \cos ec\alpha = -\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{4} \qquad \sec\alpha = 4$$

$$tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15} \qquad \cot g\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

2. Verificar las identidades:

$$tg\alpha + \cot g\alpha = \sec\alpha.\cos ec\alpha$$

$$\cot g^2\alpha = \cos^2\alpha + (\cot g\alpha.\cos\alpha)^2$$

$$\frac{1}{\sec^2\alpha} = sen^2\alpha.\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$$

$$\cot g\alpha.\sec\alpha = \cos ec\alpha$$

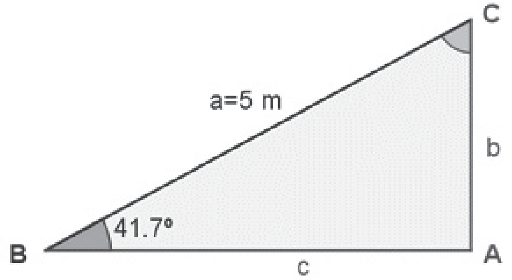
$$\sec^2\alpha + \cos ec^2\alpha = \frac{1}{sen^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

Respuesta: Verificar una identidad trigonométrica implica trabajar ambos miembros de la identidad para comprobar la equivalencia de la misma, utilizando como recuso las tablas anteriores. Ejemplo (opción de verificación).

$$tg\alpha + \cot g\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha.sen\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha.sen\alpha} = \sec\alpha.\cos ec\alpha$$

3. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 5 m y B = 41.7°. Resolver el triángulo.

Respuesta: Se puede resolver



ACTIVIDADES

Utilizando la propiedad de los ángulos complementarios $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=90°$ se calcula:

$$\hat{C}=90°-41{,}7°=48{,}3°$$

Recurriendo a las razones trigonométricas

$$b=a.sen\beta \quad b=5.sen41{,}7°=3{,}326m$$

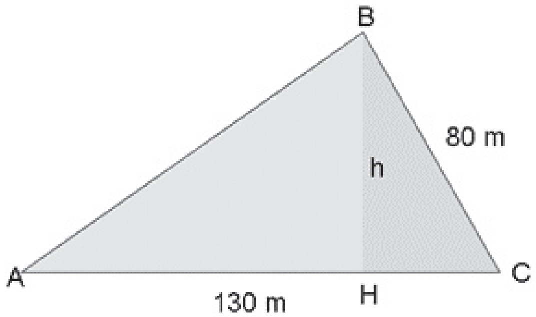
$$c=a.\cos\beta \quad c=5.\cos 41{,}7°=3{,}733m$$

4. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen b = 3 m y B = 54.6°. Resolver el triángulo.

5. De un triángulo rectángulo ABC, se conocen a = 6 m y b = 4 m. Resolver el triángulo.

6. Calcular el área de una parcela triangular, sabiendo que dos de sus lados miden 80 m y 130 m, y forman entre ellos un ángulo de 70°.

Respuesta: Se debe buscar h (altura) para poder encontrar el área, la situación proporciona el ángulo C y la medida del lado BC:



En el triángulo CHB la altura resulta:

$$h=80.sen\ \ 70°$$

Por lo tanto el área es:

$$\hat{A}=\frac{130.80.sen\ \ 70°}{2}=4886{,}40m^2$$

Calcula la altura de un árbol, sabiendo que desde un punto del terreno se observa su copa bajo un ángulo de 30° y si nos acercamos 10 m, bajo un ángulo de 60°.

Respuesta:
La altura es : $5\sqrt{3}$

ACTIVIDADES

Bibliografía

- Antonyan - Medina - Wisniewski: Problemas de precálculo, Thomson, México, 2003.

- Bono, A (2010), Los docentes como engranajes fundamentales en la promoción de la motivación de los estudiantes, disponible en: http://www.rieoei.org/deloslectores/3273Bono.pdf

- Guzman, Enseñanza de las ciencias y de la matemática, disponible en: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm

- Klimovsky - Boido: La desventura del conocimiento Matemático, Ed. A-Z, Buenos Aires, 2005.

- Miras Juan José. Vinculación Escuela Media - Universidad Del camino recorrido al camino ineludible. Rector de la Escuela Agrotécnica Salesiana "Ambrosio Olmos" - San Ambrosio, Cba. XIX Jornada Nacional Técnico-Pedagógica "F.E.D.I.A.P 30 años sembrando en el campo educativo". Ituzaingó – Corrientes. 2004.

- Ministerio de Cultura y Educación de la Nación: Matemática. Metodología de la enseñanza, Conicet, Buenos Aires, 1996.

- Programa de Articulación Universidad – Nivel Medio. (2003). Listado de competencias básicas para el ingreso a la universidad. – Dirección de Articulación de Niveles Educativos. Rectorado Universidad Nacional del Nordeste.

- Programa Apoyo a la Articulación Universidad – Escuela Media II. (2003). Encuentro entre docentes de la Universidad y el Nivel Medio. Rectorado Universidad Nacional del Nordeste.

- Sadovsky Patricia. Enseñar matemática hoy: miradas, sentidos y desafíos, Buenos Aires, Arg. 2005.

- Sobel - Lerner: Algebra, Prentice Hall, Méjico, 1996.

- Stewart - Redlin - Watson: Precálculo. Matemática para el cálculo, Cengage, México, 2007.

- Stewart, J.: Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas, Cengage, México, 2008.

- Ley de Educación Nacional Nº 26.206.

- Resolución CFE Nº 23/07, 24/07 y 30/07.
- Resolución CFC y E Nº 241/05.
- Resolución CFC y E Nº 251/05.
- Plan Nacional de Formación Docente.
- Lineamientos Nacionales para la formación docente continua y el desarrollo profesional.
- Resolución Nº 3322/10 – CGE.
- Anexo Resolución Nº 3322/10 – CGE.
- Von Glasersfeld, E.: Aspectos del Constructivismo Radical. En Peckman, M. (Comp.) Construcciones de la Experiencia Humana. Gedisa. Barcelona,1996.
- Ministerio de Gobierno, Justicia y Educación de la provincia de Entre Ríos. Diseño Curricular de Educación Secundaria – Tomo II- CGE – 2011.
- Ministerio de Educación de la provincia de Buenos Aires – Aportes para el desarrollo curricular. Matemática. Orientaciones para la planificación de la enseñanza – 2009.
- Ministerio de Educación – Presidencia de la Nación. Pautas pedagógicas para elaborar Evaluaciones Diagnósticas. Matemática.
- Lina Oviedo, Ana Kanashiro – Curso de extensión "El rol de las representaciones semióticas en la enseñanza de la matemática en la escuela media" – Universidad Nacional del Litoral – 2009.

MATEMÁTICA. Diálogo Escuela Secundaria y Universidad... es la ejecución de un Proyecto de Mejora de la Formación en Ciencias Exactas y Naturales en la Escuela Secundaria, presentado ante la Secretaría de Políticas Universitarias y Subsecretaría de Gestión y Coordinación de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación de la Nación.

La Universidad Autónoma de Entre Ríos pretende acercar este cuaderno de actividades y acompañamiento al docente de matemática, con el objetivo de poner a su disposición los contenidos de la disciplina considerados fundamentales al momento de ingresar a carreras, de grado y pre-grado, creando así una mayor articulación entre educación secundaria y superior.

Aquí el lector docente encontrará información, sugerencias y orientaciones para la planificación y organización del trabajo en el aula, el uso de materiales y recursos, el acompañamiento de los alumnos y otras tareas implicadas en esta última etapa de la educación obligatoria.

ISBN 978-950-9581-50-0

9 789509 581500

L U A Libro Universitario Argentino

REUN RED DE EDITORIALES DE UNIVERSIDADES NACIONALES

Universidad Autónoma de Entre Ríos