## [Capítulo 1]

# Probabilidad

*...nuestra época ha comprendido cada vez más claramente que allí donde se perfora el suelo de la ciencia se acaba por encontrar las probabilidades.*

Pius Servien

Un poco de historia...

Podría decirse que la historia de la probabilidad nace en el siglo XVII con Pierre Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662), quienes procuraron resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar planteados a través de una extensa relación epistolar con Antoine Gombaud, Caballero De Méré (filósofo y escritor que vivió durante el reinado de Luis XIV).

Más adelante, en el siglo XVIII, el cálculo de probabilidades tuvo un notable desarrollo gracias a los aportes de matemáticos como Jakob Bernoulli (1654-1705), Karl Friedich Gauss (1777-1855) y Pierre-Simón Laplace (1749-1827), entre otros.

A mediados del siglo XIX, el fraile agustino Gregor Mendel estudió la herencia genética y su obra *La matemática de la Herencia* fue una de las primeras aplicaciones de la teoría de probabilidad en las ciencias naturales.

Sin dudas, la probabilidad constituye la esencia de la Estadística predictiva e inferencial. Incluso, en muchas ocasiones nos enfrentamos a expresiones que utilizan el término "probabilidad" y estamos preparados, al menos, para interpretar su significado en el contexto involucrado y relacionarlo con cierto grado de veracidad de que acontezca una situación particular. Así, por ejemplo, enunciamos, leemos o escuchamos frases tales como "es poco probable ganar la lotería", "es muy probable sufrir un accidente automovilístico conduciendo a alta velocidad en rutas" o nos preguntamos "¿cuán probable es sufrir un robo en el microcentro de Paraná?", "¿es probable que ocurran disturbios en la vía pública cuando hay manifestaciones masivas?"

---

**Conocer la probabilidad de ocurrencia de un suceso nos permite diseñar estrategias para organizar, prevenir o decidir, aunque íntimamente sepamos que el destino nos pueda deparar otra situación a la esperada.**

---

Por ejemplo, si escuchamos por la radio en horas tempranas de la mañana que hay un 90% de probabilidad de lluvia para el curso del día y sabemos que vamos a andar todo el día deambulando al aire libre, es posible que decidamos llevar paraguas, aunque puede que carguemos con él sin tener que usarlo.

En tal sentido, la interpretación intuitiva más generalizada en las personas del ámbito no matemático respecto de la probabilidad puede resumirse así:

---

**La probabilidad es un número entre 0 y 1 (inclusive ambos extremos) que refleja cierta certeza de que un suceso ocurra.**
**Valores de probabilidad cercanos a uno implican esperar que el suceso ocurra. Por el contrario, valores cercanos a cero inducen a suponer que el suceso no ocurrirá.**

---

¿Cuán cercano a cero o a uno debe ser un valor de probabilidad para considerar que hay una probabilidad baja o alta de ocurrencia de un suceso?

Para esto no hay una respuesta única ni reglas ni valores de corte. De hecho, es muy subjetivo y se relativiza en función de la situación que se está valorando.

Por ejemplo, si tenemos un 80% de certeza de que un sujeto, sospechoso de haber cometido un crimen, es el asesino y la condena será prisión perpetua, esta probabilidad de 0,80 no es lo suficientemente alta como para acusarlo y sentenciarlo. Pero si se sabe que sin el uso de preservativo existe un 80% de probabilidad de contagio de alguna enfermedad de tranmisión sexual, seguramente consideraremos a este valor alto y, si somos responsables, decidiremos protegernos.

Antes de definir el concepto de probabilidad, debemos acordar el significado de algunos términos relacionados que nos permitirán una mejor comprensión.

## Experimento estadístico

**Llamamos experimento estadístico a cualquier circunstancia que puede ser repetida bajo condiciones estables, en las que se observa alguna característica que generará un conjunto de datos.**

*Ejemplos*

1. Observar el número de horquillas en huellas digitales. Cada huella es una circunstancia y la característica a observar es el número de horquillas presentes.
2. Observar la presencia o no de indicios humanos en escenas criminales. Cada escena analizada es una circunstancia y la característica a observar es si hay o no indicios humanos.
3. Observar el grupo sanguíneo en sospechosos de un asesinato. Cada sospechoso analizado es una circunstancia y la característica a observar es el grupo sanguíneo.
4. Observar las ciudades argentinas para determinar su concentración ambiental de monóxido de carbono (CO). Cada ciudad analizada es una circunstancia y la característica a observar es la concentración de CO.

La característica a observar en cada circunstancia es la misma y tiene las siguientes particularidades:

- El resultado o valor de la característica en cada ensayo no se conoce de antemano.
- Podemos enunciar todos los resultados posibles a obtener a partir de la observación de la característica de interés. En tal sentido, los resultados posibles dan lugar al concepto estadístico "Espacio muestral".

## Espacio muestral

**El espacio muestral (simbolizado con la letra S) se define como el conjunto de todos los resultados que pueden surgir de observar una característica en un experimento estadístico. Cada resultado se denomina elemento del espacio muestral.**

Volviendo a los ejemplos dados en el apartado anterior (Experimento estadístico) los espacios muestrales de cada experimento serían:

- S={0, 1, 2,...} para la característica a observar en el ítem 1: "número de horquillas en huellas digitales". Apreciar que los resultados posibles son números enteros no negativos.
- S={si, no} para la característica a observar en el ítem 2: "presencia o no de indicios humanos en escenas de crímenes". Apreciar que los resultados posibles son solo dos y de carácter nominal.
- S={A, B, AB, O} para la característica a observar en el ítem 3: "grupo sanguíneo de los sospechosos". Apreciar que los resultados posibles son valores de carácter nominal.
- S=[0,∞) para la característica a observar en el ítem 4: "concentración ambiental de CO". Apreciar que los resultados posibles son números reales no negativos.

## Suceso o evento

**Entendemos como suceso o evento al subconjunto de dichos resultados o elementos de un espacio muestral dado. En estadística a los sucesos los vamos a simbolizar con letras imprentas mayúsculas, tales como A, B, C,...**

### *Ejemplos*

A los espacios muestrales enunciados en el apartado anterior (Espacio muestral) vamos a definirle, respectivamente, algún suceso.

- Para el espacio muestral surgido tras observar el "número de horquillas en huellas digitales", definimos el Suceso A como "el número de horquillas hallado en una huella es, como mucho, 5".

  Este suceso tiene los siguientes elementos: A={0, 1, 2, 3, 4, 5}.

- Para el espacio muestral surgido tras observar la "presencia o no de indicios humanos en escenas de crímenes", definimos el Suceso A como "se encuentran indicios humanos".

  Este suceso solo tiene un elemento: A={si}.

- Para el espacio muestral surgido tras observar el "grupo sanguíneo de los sospechosos", definimos el Suceso A como "el grupo sanguíneo sea A o B".

  Este suceso tiene los siguientes elementos: A={A, B}.

- Para el espacio muestral surgido tras observar "concentración ambiental de CO", definimos el Suceso A como "la concentración de CO es inferior a 10 partes por millón (ppm)".

  Los elementos de este suceso son: A=[0,10).

De estos ejemplos, claramente, podemos apreciar que cada suceso es un subconjunto del espacio muestral.

## Relaciones entre sucesos

**Si se establece un suceso para un espacio muestral, se define como Suceso Complementario (o contrario) al suceso formado por los elementos que no pertenecen al suceso establecido. Si el suceso definido fue nominado A, el suceso complementario de A se simboliza con A´ o $A^{c}$.**

### *Ejemplo*

Para la característica: "concentración ambiental de CO en ciudades argentinas con más de 200.000 habitantes" se define el suceso A como "concentraciones de CO inferiores a 10ppm", cuyos elementos son: A= [0,10), por consiguiente el suceso complementario a A es "concentraciones de CO iguales o superiores a 10ppm", cuyos elementos serán: Ac=[10,∞).

Estos dos sucesos son mutuamente excluyentes puesto que no pueden ocurrir en simultáneo; por lo tanto, no tienen elementos comunes.

En símbolos: $A \cap Ac = \varnothing$ (donde ∅ significa conjunto vacío, y se puede leer "A y su suceso complementario (Ac) tienen intersección (∩) vacía").

**Si se definen dos (o más) sucesos para un espacio muestral la "unión" de estos sucesos es un nuevo suceso, formado por los elementos que pertenecen a uno u otro suceso, o bien a ambos a la vez. Si se definen dos sucesos, A y B, la unión entre estos dos se simboliza AUB.**

### *Ejemplo*

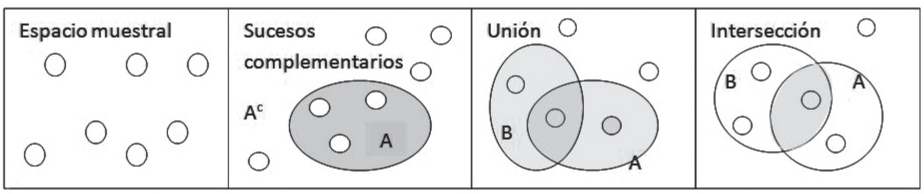
Para la característica: "grupo sanguíneo de los sospechosos de un asesinato" se define el suceso A, "tener grupo sanguíneo A", y el suceso B, "tener grupo sanguíneo B". El suceso Unión (AUB) definido como "tener grupo sanguíneo A o B" tiene como elementos: AUB={A, B}. Además, como A y B son mutuamente excluyentes, no hay elementos comunes.

**La "intersección" de dos sucesos (A y B) definidos para una situación aleatoria, es un nuevo suceso formado por los elementos comunes a ambos sucesos. Se simboliza A∩B.**

### *Ejemplo*

Para la característica "concentración ambiental de CO en ciudades argentinas con más de 200.000 habitantes" se definió el suceso A como "concentraciones de CO inferiores a 10ppm", cuyos elementos son: A=[0,10). En tanto, se establece el suceso B como "concentraciones superiores a 5ppm". Por lo tanto, el suceso "intersección" entre A y B quedará definido como "concentraciones superiores a 5ppm e inferiores a 10ppm" y será otro subconjunto que tendrá como elementos los valores de CO que vayan entre cinco y diez ppm. En símbolos: A∩B=(5,10).

Síntesis gráfica de relación entre sucesos:



## Concepto de Probabilidad

Desde el principio la elaboración de una teoría de probabilidad que sea lo suficientemente precisa y aceptada por la comunidad científica fue algo difícil de conseguir.

**La definición clásica es la de Laplace, surgida de los juegos de azar, pero de uso limitado puesto que descansa sobre la base de dos condiciones:**

> ### Importante
> Tener en cuenta que en simbología estadística, la palabra probabilidad se representa con la letra P, luego entre paréntesis se escribe el nombre del evento al que se quiere calcular la probabilidad.

1. **El espacio muestral debe ser finito.**
2. **Los resultados del espacio muestral deben ser todos igualmente probables de ocurrir.**

**De este modo, si A es un evento con n elementos del espacio muestral y el número total de resultados posibles del espacio muestral es N, entonces la probabilidad de A será P(A)=n/N.**

*Ejemplos*

1. Si se lanza un dado completamente balanceado (ideal) ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?

   Vemos que el espacio muestral lo conforman los siguientes elementos: S={1, 2, 3, 4, 5, 6} de los cuales tres de ellos son números pares, luego la probabilidad deseada será P(par)=3/6=0,50.

2. En una familia que tiene tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que dos sean niñas y el otro un niño? Considerando igualmente probable el nacimiento de un niño o niña y usando "a" para niña y "o" para niño, el espacio muestral es S = {aaa, aao, aoa, aoo, oaa, oao, ooa, ooo} por lo que N=8.

   El evento A, "haya dos niñas y un niño", tiene como elementos a {aao, aoa, oaa} por lo que n=3; entonces la P(A)=3/8=0,375.

> ### Importante
> Siempre la probabilidad es un número mayor o igual a cero y menor o igual a uno.
>
> En símbolos: $0 \le P(a) \le 1$.

> *Actividad*
>
> Siguiendo la terminología explicada anteriormente, defina para cada uno de los ejemplos dados, un evento A que tenga probabilidad cero de ocurrir y otro evento B que tenga probabilidad 1 de ocurrir.
>
> En símbolos: P(A)=0 y P(B)=1.

### Objeciones a la definición clásica

Al momento de calcular probabilidades de los diferentes eventos de un experimento estadístico con la expresión clásica, el espacio muestral debe ser finito y además tal expresión solo es aplicable en el caso de resultados igualmente probables de ocurrir.

En tal sentido, si nos preguntamos cuán probable es sufrir un accidente mortal en la ruta 14, intuitivamente sabemos que ni el espacio muestral es finito ni los resultados "sufrir accidente mortal y no sufrirlo" son igualmente probables.

Para esto se necesita un concepto más general de la probabilidad. Una forma de dar respuesta a estas preguntas es obtener algunos datos empíricos que evidencien, de alguna manera, la frecuencia con la que ocurre un suceso y a partir de estos poder estimar la probabilidad de ocurrencia del mismo.

Surge así la concepción empírica "a posteriori" o "frecuencial" de probabilidad, desarrollada a partir de las críticas realizadas a la definición clásica de Laplace que acabamos de comentar. La definición, formalmente establecida por el físico Richard von Mises en 1928, se basa en el concepto de frecuencia relativa de un suceso asociado a un experimento aleatorio que se repite sucesivamente bajo idénticas condiciones.

En tal sentido, supongamos que repetimos *n* veces una situación aleatoria en la que observamos una característica y, que en esta serie de *n* ensayos, un evento E ocurre exactamente en *r* de estos. Entonces la frecuencia relativa del evento E es *r/n*. En símbolo: fr(E)=r/n.

Esta frecuencia relativa, a medida que aumentamos el número de ensayos o situaciones, será más estable y se aproximará al verdadero valor de la probabilidad.

---

**Cuando se usa la definición frecuencial para estimar probabilidades es importante tener en cuenta:**

- **La probabilidad obtenida de esta manera es únicamente una estimación del valor real.**
- **Cuanto mayor sea el número de ensayos o de unidades de observación, tanto mejor será la estimación de la probabilidad.**
- **La probabilidad es propia a un solo conjunto de condiciones idénticas, o sea que la validez de emplear esta definición depende de que sean iguales las condiciones en las que se realizan los n ensayos.**

---

La definición de probabilidad enunciada anteriormente es netamente empírica o experimental. A principios del siglo XX, el matemático ruso Andrei Kolmogorov (1903-1987) la definió de forma axiomática, de la siguiente manera:

- Axioma de no negatividad, P(A)≥0.
- Axioma de suceso seguro, P(S)=1.
- Axioma de aditividad numerable, sean $A_1$, A2,..., Ak,.... eventos o sucesos mutuamente excluyentes, entonces la probabilidad de la unión numerable de estos eventos es la suma de las probabilidades individuales. En símbolos es:

$$P(U_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

---

**La probabilidad de un suceso proporciona una medida de su grado de incertidumbre. Conocemos las reglas (axiomas) que debe cumplir una función de probabilidad pero no disponemos de un método general que permita asignar una probabilidad a cada suceso. Este es un problema que se conecta directamente con la interpretación de la probabilidad según las distintas concepciones. Así, bajo una perspectiva clásica el método para asignar probabilidades es la Regla de Laplace y bajo la perspectiva frecuentista las probabilidades se determinan a partir de las frecuencias relativas.**

---

Todas estas concepciones son compatibles con los axiomas de Kolmogorov del que surgen reglas para el cálculo de probabilidades. Así, si P(A) es la probabilidad de un evento A en determinado experimento aleatorio y $A^c$ es el evento complemento de A, entonces la probabilidad de este puede calcularse restándosele a 1 la probabilidad de A. En símbolos: P(Ac)=1-P(A).

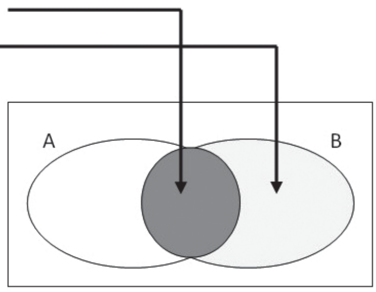
O si se tienen dos eventos (A y B) no mutuamente excluyentes, cuyas probabilidades de ocurrencia son P(A) y P(B), respectivamente, entonces la probabilidad de la unión de ambos es $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$.

## Probabilidad condicional

Se dice que dos eventos son dependientes o están asociados cuando la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos cambia según ocurra o no el otro suceso.

La probabilidad de un evento condicionado a la ocurrencia de otro se define matemáticamente como:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$




Donde P(A|B) significa la probabilidad de que ocurra A dado que ocurrió B, cuando la P(B)>0.

### Importante

No confundir “condicional” con “intersección”, puesto que la probabilidad de la intersección ($P(A \cap B)$) es una probabilidad simple relativizada a la totalidad de elementos del espacio muestral, mientras que la probabilidad de A condicionada a la ocurrencia de B (P(A|B)) es con respecto a la totalidad de elementos en B.

***Ejemplo***

Se sospecha que los robos callejeros en los que el delincuente amenaza a la víctima con algún arma están condicionados al género del atacante. En una investigación bajo diseño estadístico, se recaba información de registros policiales respecto del género del delincuente y la portación de algún arma al momento del ataque, obteniéndose los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

| | Femenino (F) | Masculino (M) | Total parcial |
|---|---|---|---|
| A (arma) | 100 | 400 | 500 |
| $A^c$ (sin arma) | 250 | 250 | 500 |
| Total parcial | 350 | 650 | 1000 |

La probabilidad de que en un robo se amenace a la víctima con un arma dado que el delincuente es masculino es:

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} \cong \frac{\frac{400}{1000}}{\frac{650}{1000}} \cong 0{,}61$$

La probabilidad de que en un robo se amenace a la víctima con un arma dado que el delincuente es femenino es:

$$P(A \mid F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} \cong \frac{\frac{100}{1000}}{\frac{350}{1000}} \cong 0{,}29$$

Vemos que las probabilidades anteriores, P(A|M) y P(A|F), difieren entre sí, por lo que podemos inferir que el suceso "robo con arma" depende del género del atacante.

Otras probabilidades de interés para este ejemplo, pero que no son condicionadas, podrían ser:

- La probabilidad de que un robo callejero sea cometido por un sujeto masculino sería:

$$P(M) \cong \frac{650}{1000} \cong 0{,}65$$

- La probabilidad de que un robo callejero sea perpetrado amenazando a la víctima con arma sería:

$$P(A) \cong \frac{500}{1000} \cong 0{,}50$$

- La probabilidad de que un robo callejero sea cometido por un hombre y la víctima sea amenazada con arma sería:

$$P(M \cap A) \cong \frac{400}{1000} \cong 0{,}40$$

**Importante**

En caso de que las probabilidades anteriores hubiesen dado valores muy parecidos, para decidir si hay o no dependencia, se dispone de otras técnicas estadísticas que permiten arribar a una conclusión más confiable.

**Dos sucesos son dependientes si la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos se modifica según ocurra o no el otro suceso.**

Si A es un suceso independiente de otro suceso B se cumple lo siguiente:

$$P(A \mid B) = P(A) \quad o \quad P(B \mid A) = P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

### *Ejemplo*

Denominamos A al evento “sufrir un accidente conduciendo un auto, por imprudencia de un motociclista” y B al evento “sexo masculino del automovilista”. Es de presumir que el hecho de que el conductor de la moto cometa una imprudencia que ocasione un accidente es independiente del sexo del conductor del auto.

En una investigación con diseño estadístico se relevó esta información, cuyos resultados son los siguientes:

| | B | $B^c$ | Total |
|---|---|---|---|
| A | 125 | 123 | 248 |
| $A^c$ | 225 | 221 | 446 |
| Total | 350 | 344 | 694 |

La probabilidad de que un automovilista sufra un accidente por imprudencia de un motociclista es la misma siendo aquel hombre o mujer.

$$P(A \mid B) \cong P(A \mid B^c)$$
$$0{,}3571 \cong 0{,}3575$$

## Teorema de Bayes en la probabilidad condicional

En términos generales, el teorema de Thomas Bayes formulado en 1763 es de enorme relevancia puesto que vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A, donde A y B son sucesos dependientes.

Para tratar este concepto vamos a presentar una situación problema, que nos permita llegar a comprender el teorema de Bayes y sus aplicaciones.

### *Ejemplo*

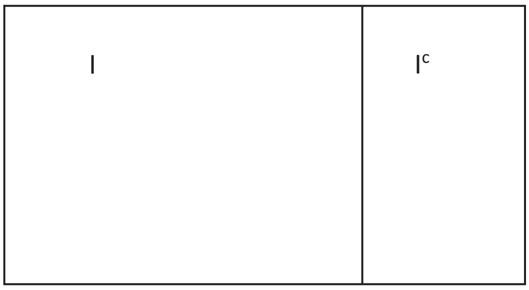
Se ha detectado que los conductores de motos en la ciudad de Paraná el 80% de las veces infringen una norma de tránsito. Así mismo, está registrado que el 30% de las veces que uno de estos conductores comete una infracción, provoca un accidente. Mientras que si el motociclista no viola las normas, la probabilidad de que ocurra un accidente es del 5%.

En este contexto nos preguntamos, ¿cuán probable es que, habiendo ocurrido un accidente en el que está involucrado un motociclista, este haya cometido una infracción?

Para responder esta cuestión organicemos, traduzcamos y representemos gráficamente los datos que tenemos.

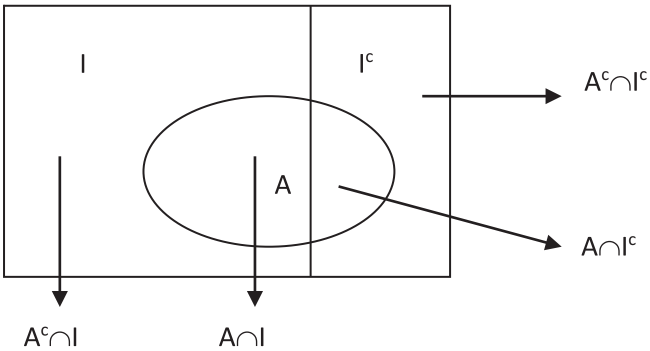
Entonces, la probabilidad de que un conductor de moto infrinja (I) una norma de tránsito es 0,80 (en símbolos: P(I)=0,80); por lo que la probabilidad del complemento es 0,20 (en símbolos $P(I^c)=0,20$). Observemos que nuestro espacio muestral está dividido en dos eventos mutuamente excluyentes (infringe la ley o no) y exhaustivos entre sí (las probabilidades de los eventos "infringir" y "no infringir" suman a 1).

Representación gráfica de la situación dada en un diagrama de Venn:




También, sabemos que hay un evento: "Accidente" (A) que puede suceder en ambas partes del espacio muestral detallado; y sobre esto sabemos que la probabilidad de que suceda un accidente dado que el conductor de moto cometió una infracción es de 0,30 (en símbolos: P(A|I)=0,30). Mientras que la probabilidad de que suceda un accidente dado que el conductor de moto no cometió una infracción es 0,05 (en símbolos: $P(A|I^c)=0,05$).

Completamos el diagrama anterior, representando el evento A:




Observemos que cada parte de este diagrama de Venn, es la intersección de dos sucesos y que la probabilidad del evento A es la suma de dos intersecciones: $P(A)= P(A\cap I)+P(A\cap I^c)$. Esta expresión se conoce como la Probabilidad Total del evento A.

Si queremos responder la pregunta, ¿cuán probable es que, habiendo ocurrido un accidente en el que está involucrado un motociclista, este haya cometido una infracción?

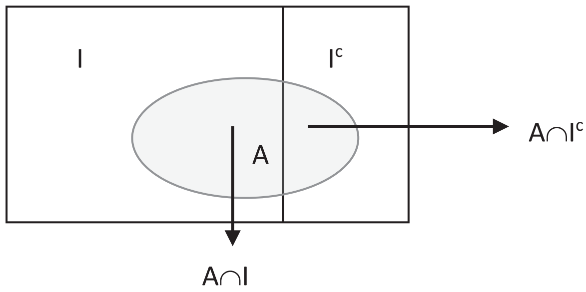
Lo que debemos calcular es:

$$P(I \mid A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \qquad (1)$$

Ambas probabilidades de este cociente no las tenemos explícitamente en nuestro conjunto de datos. ¡Pero están! ¿Dónde? Escondidas en las probabilidades condicionadas que nos han informado.

$$P(A \mid I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = 0,30 \Rightarrow P(A \cap I) = P(A \mid I)P(I) \qquad (2)$$

Volviendo a (1), nos queda reemplazar la P(A) que, como ya dijimos, $P(A)=P(A\cap I)+P(A\cap I^c)$.




El primer miembro de esa suma es la probabilidad de la intersección calculada en (2) y para calcular el segundo miembro, planteamos lo mismo que en (2) para la probabilidad condicionada que involucra esos dos eventos:

$$P(A\,|\,I^c)=\frac{P(A\cap I^c)}{P(I^c)}=0{,}05\Rightarrow P(A\cap I^c)=P(A\,|\,I^c)P(I^c) \quad (3)$$

Al reemplazar (2) y (3) en la expresión (1) nos queda:

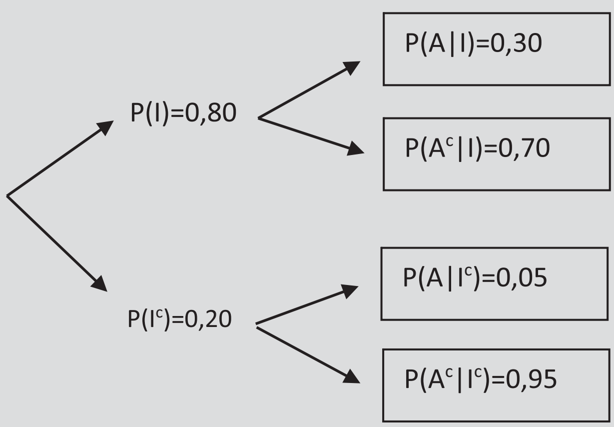
$$P(I\,|\,A)=\frac{P(I\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\,|\,I)P(I)}{P(A\cap I)+P(A\cap I^c)}=\frac{P(A\,|\,I)P(I)}{P(A\,|\,I)P(I)+P(A\,|\,I^c)P(I^c)} \quad (4)$$

A todos los valores de probabilidad requeridos en el último miembro de la igualdad presentada en la expresión (4) los conocemos, entonces podemos calcular lo deseado. Esto implicaría aplicar el Teorema de Bayes.

*Actividad*

Calcular la probabilidad de que el motociclista haya cometido una infracción dado que hubo un accidente de tránsito en el que estaba involucrado un motociclista.

Para resolver este tipo de situaciones, es muy útil representar previamente los datos en un diagrama de árbol, como se muestra a continuación:




P(I|A)=…………………………………………………………………

**Teorema de Bayes**

Si se tiene un espacio muestral conformado por un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos ({A1, A3,... , Ai,..., An}) de tal manera que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero y sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B|A_i)$, entonces, la probabilidad $P(A_i|B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)P(A_k)}$$

Donde P(Ai) son las probabilidades a priori, $P(B|A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis Ai y P(Ai|B) son las probabilidades a posteriori.

## | Aplicaciones del teorema de Bayes

- **Sensibilidad de una prueba de detección: es la probabilidad de obtener un resultado positivo en la prueba, dado que se sabe que está presente lo que se busca.**
- **Falso Negativo de una prueba de detección: es la probabilidad de obtener un resultado negativo en la prueba, dado que se sabe que está presente lo que se busca.**
- **Especificidad de una prueba de detección: es la probabilidad de obtener un resultado negativo en la prueba, dado que se sabe que no está presente lo que se busca.**
- **Falso Positivo de una prueba de detección: es la probabilidad de obtener un resultado positivo en la prueba, dado que se sabe que no está presente lo que se busca.**
- **Valor Predictivo del Positivo de una prueba de detección: es la probabilidad de que realmente esté presente lo que se busca, dado que se obtuvo un resultado positivo en la prueba de detección.**
- **Valor Predictivo del Negativo de una prueba de detección: es la probabilidad de que realmente no esté presente lo que se busca, dado que se obtuvo un resultado negativo en la prueba de detección.**

***Ejemplo***

Se sabe que cuando hay un disparo con arma de fuego, el ambiente donde se efectuó el tiro se contamina con restos de pólvora evidenciables en un 80% de las veces. Si la prueba de detección de pólvora (mediante microscopio electrónico) es sensible en un 95% de las veces y específica en igual proporción, ¿cuán probable es que no se haya disparado en el ambiente donde se encontró una persona asesinada, si se obtuvo de la muestra de aire recolectada un resultado negativo al realizar la prueba de detección de pólvora?

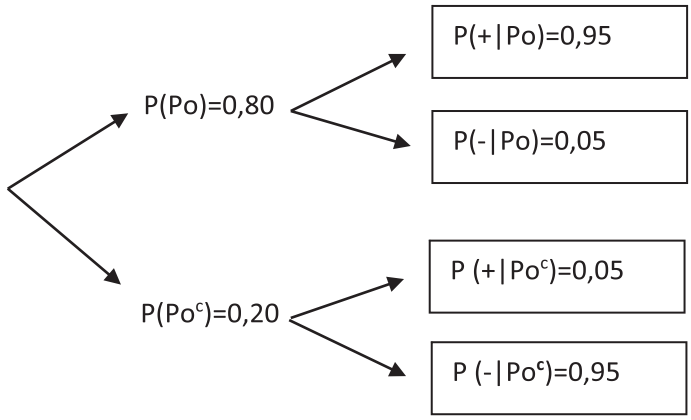
Usando un razonamiento probabilístico, ¿es factible pensar que el disparo no se efectuó en el ambiente donde se encontró la persona asesinada?

Para resolver las cuestiones planteadas, primero rescatamos los datos que tenemos disponibles, considerando como suceso: "Po" al hecho de encontrar pólvora en el ambiente tras un disparo; "$Po^c$" al hecho de no encontrar pólvora en el ambiente tras un disparo; suceso "+", al hecho de que la prueba de detección de pólvora dé positiva; y suceso "-", al hecho de que la prueba de detección de pólvora dé negativa.

Datos en símbolos:

Sensibilidad: $P(+|Po)=0{,}95$; Especificidad: $P(-|Po^c)=0{,}95$; $P(Po)=0{,}80$ y la $P(Po^c)=0{,}20$. De estos datos derivamos la probabilidad de Falso Positivo ($P(+|Po^c)$) y la probabilidad de Falso Negativo ($P(-|Po)$).

Representamos los datos en un diagrama de árbol, como sigue:




El cálculo de $P(Po^c|-)$ nos permitirá responder la primer cuestión planteada (¿cuán cierto es que realmente no se haya disparado en el ambiente donde se encontró a una persona asesinada, si se obtuvo de la muestra de aire recolectada, un resultado negativo al realizar la prueba de detección de pólvora?). Puesto que si esta probabilidad es alta, el valor predictivo negativo de la prueba es alto. Esto es: si la prueba dio negativa, es altamente probable que no haya pólvora en el ambiente.

Completemos la expresión y obtengamos la probabilidad deseada:

$$P(Po^c \mid -) = \frac{P(Po^c \cap -)}{P(-)} \cong \underline{\hspace{3cm}}$$

Con la probabilidad hallada anteriormente, ¿es lógico pensar que el disparo no se efectuó en el ambiente donde se encontró a la persona asesinada?

## Ejercicios y problemas de aplicación

1. Considerar la situación aleatoria de lanzar un dado equilibrado:

    a. ¿Cuáles son los elementos de su espacio muestral?

    b. Enumerar los elementos de los siguientes eventos considerados para la situación aleatoria enunciada:

    b1. A: "sale número par"

    b2. B: "sale un número mayor a 4"

    b3. $A \cap B$

    b4. AUB

    b5. $(AUB)^c$

    c. Calcule las probabilidades asociadas a cada uno de los eventos del ítem anterior.

    Respuestas:

    $c_1$. P(A)=0,5

    $c_2$. P(B)=0,33

    $c_3$. $P(A \cap B)$=0,17

    $c_4$. P(AUB)=0,67

    $c_5$. $P(AUB)^c$ =0,33

2. Se seleccionan al azar dos de cuatro jurados suplentes para reemplazar al jurado titular en un juicio por homicidio. Designar con A, B, C y D a cada uno de los suplentes e indicar cuáles son todos los resultados posibles de la selección enunciada. Es decir, enumere todos los resultados del espacio muestral.

3. Se ha visto que la probabilidad de muerte en la vía pública por accidente (de cualquier índole) es 0,75 y por ser víctima de un acto de delincuencia es de 0,20. Si estos eventos son mutuamente excluyentes entre sí, encontrar:

    a. la probabilidad de que una persona muera por alguna razón diferente a las enunciadas.

    b. la probabilidad de que una persona muera en la vía pública por un accidente o por otra razón no relacionada con la ejecución de un delito.

    Respuestas:

    a. 0,05

    b. 0,80

4. La papiloscopía es la ciencia que estudia la morfología papilar con fines de identificación humana de forma fehaciente, categórica e indubitable. La revelación de una huella se puede hacer por dos métodos: químico o físico, según la superficie en la que se halle la muestra. Si la probabilidad de que una huella esté en una superficie en la que solo pueda usarse el método químico (suceso A) es 0,15 y la probabilidad de que esté en una superficie en la que solo pueda usarse el método físico (suceso B) es 0,34, encontrar las siguientes probabilidades considerando que los sucesos son independientes:

   a. $P(A \cap B)$

   b. $P(A \cup B)$

   Respuestas:

   a. 0,05

   b. 0,44

5. Un sistema de detección de humo tiene dos dispositivos (A y B) que operan independientemente uno del otro. Cuando un sistema se activa por el humo acciona una alarma y genera una descarga de agua. Si hay humo, la probabilidad de que el aparato lo detecte con el dispositivo A es de 0.95 y la probabilidad de que lo detecte con el dispositivo B es de 0.90.

   a. Determinar la probabilidad de que el sistema detecte humo.

   b. Determinar la probabilidad de que el sistema no detecte humo.

   Respuestas:

   a. 0,995

   b. 0,005

6. Se revisaron 266 procesos penales, elegidos al azar, y se buscó identificar si ellos contaron con rastros visibles y/o rastros latentes que sirvieran a la investigación del caso. La tabla muestra los resultados obtenidos:

| | | Rastros Latentes (L) | |
|---|---|---|---|
| | | No | Si |
| Rastros | Si | 18 | 12 |
| Visibles (V) | No | 212 | 24 |

   En base a este registro, estime:

   a. la probabilidad de contar con rastros latentes en un proceso penal.

   b. la probabilidad de contar con rastros visibles en un proceso penal.

   c. la probabilidad de contar con rastros latentes dado que ya se ha observado la existencia de rastros visibles.

d. Comparar los resultados obtenidos en los ítems a) y c) y extraer conclusiones.

Respuestas:

a. 0,865

b. 0,113

c. 0,60

7. El 60% de los accidentes automovilísticos involucran a un motociclista. De estos, la probabilidad de que alguno de los implicados en el evento muera es de 0,20. Mientras que, en los accidentes que no involucran motocicletas, esta probabilidad es de 0,02.

   a. Calcular el porcentaje de muerte por accidentes automovilísticos.

   b. Si en un accidente automovilístico hubo un muerto, determinar cuán probable es que en el mismo esté involucrado un motociclista.

   Respuestas:

   a. 0,128

   b. 0,94

8. Supongamos que el 30% de los accidentes fatales en auto se deben a fallas mecánicas propias del rodado. Si un accidente ocurre por una de estas fallas mecánicas, la probabilidad de que un perito lo detecte es 0,90. Mientras que si el accidente no obedece a esta cuestión, la probabilidad de que el perito lo interprete erróneamente como tal es de 0,20.

   a. Si ocurre un accidente de auto y el perito informa que se debió a una falla mecánica, ¿cuál es la probabilidad de que el accidente haya ocurrido por tal razón?

   b. Si ocurre un accidente y el perito informa que no fue por causa mecánica, ¿cuál es la probabilidad de que sí haya ocurrido por una causa mecánica?

   Respuestas:

   a. 0,66

   b. 0,05

9. Se presume que una prueba química de detección de cierto material utilizado en explosivos tiene un 90% de sensibilidad y de especificidad. De la experiencia forense se sabe que solo el 15% de los explosivos caseros son fabricados con este material que es muy costoso. Si en una escena de explosión de una bomba casera se recoge material de desecho y se le realiza la prueba química, dando esta positivo para el material explosivo en cuestión, ¿cuán probable es que la bomba lo haya tenido realmente?

   Respuesta:

   0,61

10. Un análisis colorimétrico para detectar la presencia de nitratos en aguas de pozos tiene una sensibilidad del 95% y una especificidad del 90%. Las investigaciones reportan que el 30% de las aguas de pozo contienen nitratos.

a. Calcular la probabilidad de que una muestra de agua de pozo dé positivo en la técnica de detección de nitrato.

b. Si al analizar una muestra de agua de pozo la técnica da positivo para la presencia de nitrato, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo contenga?

Respuestas:

a. 0,355

b. 0,803

11. En cierta localidad, la cuarta parte de los conductores de coche son mujeres. La probabilidad de que una conductora mujer sufra un accidente en un año cualquiera es de 1/10.000; mientras que esta probabilidad, para los hombres es de 5/10.000.

a. Determinar la probabilidad de que haya un accidente en tal localidad en un año cualquiera (cualquiera sea el género del conductor).

b. Determinar la probabilidad de que si acontece un accidente, el conductor sea hombre.

Respuestas:

a. 0,0004

b. 0,94

12. Se registran aleatoriamente accidentes de tránsito en rutas y se observa si el conductor muere (M) o no, y si este estaba alcoholizado (A) o no. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

| | M | $M^c$ |
|---|---|---|
| A | 425 | 400 |
| $A^c$ | 225 | 250 |

a. Estimar la probabilidad de que el conductor muera en un accidente de tránsito en rutas.

b. Estimar la probabilidad de que el conductor muera en un accidente de tránsito en rutas, dado que estaba alcoholizado.

Respuestas:

a. 0,50

b. 0,51